CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 6– GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 6.1. *[7.64]* Dati i vettori linearmente indipendenti $v_1 = (3, 0, 1)$ e $v_2 = (1, 4, -2)$ completare l'insieme $S = \{v_1, v_2\}$ in modo da ottenere una base di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 6.2. *[7.65]* Siano

$$v_1 = (1, -1, -1, 1),\ v_2 = (k, 1, 1, -1)\ \in \mathbf{R}^4$$

a) Si trovino i valori del parametro k per i quali v_1 e v_2 sono indipendenti.
b) Per $k = 2$, si estenda l'insieme $\{v_1, v_2\}$ a una base di $\mathbf{R}^4$.

Esercizio 6.3. *[8.8]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$A = \mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare una base di Nucleo e Immagine di T.
b) Stabilire se $(-3, 2, 1)$ appartiene a T.

Esercizio 6.4. *[8.7]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1, 2, 1)$, $T(e_2) = (1, 0, -1)$.

a) Esplicitare $T(x, y)$.
b) Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).
c) Stabilire se $(3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 6.5. *[8.6]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$.

a) Determinare Nucleo e Immagine di T.
b) Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).
c) Determinare $T(1, 2)$ usando la definizione e usando la matrice A.

Esercizio 6.6. *[8.9]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi : \quad x + 2y = 0$.

Esercizio 6.7. *[8.11]* Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1)$$

rispetto alle basi canoniche.

a) Trovare una base del nucleo $\ker(T)$ e una base dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$.
b) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.
c) Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1 - k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?

Esercizio 6.8. *[8.30]* Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Stabilire se T invertibile.
b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T.

Esercizio 6.9. *[8.32]* Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.
b) Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$ al variare di k.

Esercizio 6.10. *[8.17]*

a) Verificare che le relazioni
$$T(1,1,1) = (-1,2), \quad T(0,1,1) = (0,4), \quad T(1,1,0) = (2,1)$$
definiscono un'unica applicazione lineare T da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$.

b) Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.

c) Trovare basi di $Im(T)$ e di $N(T)$.

Esercizio 6.11. *[8.19]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare tale che
$$T(x, y, z) = (2x, y + z)$$

(1) Dato il vettore $w = (1, 1, 1)$, calcolare $T(w)$.

(2) Determinare la matrice $A = M(T)$ associata a T rispetto alle basi canoniche.

(3) Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice A.

(4) Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali $Im(T) \subseteq \mathbf{R}^2$ e $\ker(T) \subseteq \mathbf{R}^3$.

(5) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

(6) Determinare la matrice $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbf{R}^2$.

(7) Determinare la matrice P di cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$.

(8) Determinare le componenti del vettore $w = (1, 1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ utilizzando la matrice P (o meglio P^{-1}).

(9) Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B.

Esercizio 6.12. *[8.36]* Sia $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare
$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) Si trovi una base del nucleo di S e una base dell'immagine di S.

b) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori
$$v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 1)$$
Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S.

Esercizio 6.13. *[8.37]* Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ definita da
$$T(x, y, z) = (3x - 2y,\ x + y + z,\ 2x - 3y - z)$$

a) Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.

b) Si scriva la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2, 1, 0),\ (1, 1, 0),\ (0, 1, 1)\}$.

c) Trovare la distanza euclidea tra il punto $P = (1, 1, 1)$ e il nucleo $N(T)$.

Esercizio 6.14. *[8.44]* Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1),\ (0, 2, 2),\ (0, 0, 3)\}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Si scriva la matrice associata a S rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.

Esercizio 6.15. *[9.1]* Verificare che $v = (1, 0, 0, 1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$
Determinare inoltre il relativo autovalore.

Esercizio 6.16. *[9.2]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da
$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) Verificare che i vettori $v_1 = (0, 3, 1)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$ sono autovettori di T e determinare i rispettivi autovalori.

b) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

c) Determinare la matrice (diagonale) D associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.

d) Determinare la matrice diagonalizzante P (cioé la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$).