# CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 6– GEOMETRIA 2008/09

**Esercizio 6.1.** *[7.64]* Dati i vettori linearmente indipendenti $v_1 = (3, 0, 1)$ e $v_2 = (1, 4, -2)$ completare l'insieme $S = \{v_1, v_2\}$ in modo da ottenere una base di $\mathbf{R}^3$.

**Esercizio 6.2.** *[7.65]* Siano

$$v_1 = (1, -1, -1, 1),\ v_2 = (k, 1, 1, -1)\ \in \mathbf{R}^4$$

a) Si trovino i valori del parametro $k$ per i quali $v_1$ e $v_2$ sono indipendenti.
b) Per $k = 2$, si estenda l'insieme $\{v_1, v_2\}$ a una base di $\mathbf{R}^4$.

**Esercizio 6.3.** *[8.8]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$A = \mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare una base di Nucleo e Immagine di $T$.
b) Stabilire se $(-3, 2, 1)$ appartiene a $T$.

**Esercizio 6.4.** *[8.7]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1, 2, 1),\ T(e_2) = (1, 0, -1)$.
a) Esplicitare $T(x, y)$.
b) Determinare la matrice $A$ associata a $T$ (rispetto alle basi canoniche).
c) Stabilire se $(3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

**Esercizio 6.5.** *[8.6]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$.
a) Determinare Nucleo e Immagine di $T$.
b) Determinare la matrice $A$ associata a $T$ (rispetto alle basi canoniche).
c) Determinare $T(1, 2)$ usando la definizione e usando la matrice $A$.

**Esercizio 6.6.** *[8.9]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso $T$ del piano $\pi : \quad x + 2y = 0$.

**Esercizio 6.7.** *[8.11]* Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1)$$

rispetto alle basi canoniche.
a) Trovare una base del nucleo $\ker(T)$ e una base dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$.
b) Dire se $T$ è iniettiva e/o suriettiva.
c) Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1 - k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di $T$?

**Esercizio 6.8.** *[8.30]* Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Stabilire se $T$ invertibile.
b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di $T$.

**Esercizio 6.9.** *[8.32]* Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si dica se esistono valori del parametro reale $k$ per i quali $T$ è iniettiva o suriettiva.
b) Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$ al variare di $k$.

**Esercizio 6.10.** *[8.17]*

a) Verificare che le relazioni

$$T(1,1,1) = (-1,2), \quad T(0,1,1) = (0,4), \quad T(1,1,0) = (2,1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare $T$ da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$.

b) Scrivere la matrice rappresentativa di $T$ rispetto alla basi canoniche.

c) Trovare basi di $Im(T)$ e di $N(T)$.

**Esercizio 6.11.** *[8.19]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x,y,z) = (2x, y+z)$$

(1) Dato il vettore $w = (1,1,1)$, calcolare $T(w)$.
(2) Determinare la matrice $A = M(T)$ associata a $T$ rispetto alle basi canoniche.
(3) Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice $A$.
(4) Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali $Im(T) \subseteq \mathbf{R}^2$ e $\ker(T) \subseteq \mathbf{R}^3$.
(5) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
(6) Determinare la matrice $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ associata a $T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbf{R}^2$.
(7) Determinare la matrice $P$ di cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$.
(8) Determinare le componenti del vettore $w = (1,1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ utilizzando la matrice $P$ (o meglio $P^{-1}$).
(9) Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice $B$.

**Esercizio 6.12.** *[8.36]* Sia $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare

$$S(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) Si trovi una base del nucleo di $S$ e una base dell'immagine di $S$.

b) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori

$$v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (1,0,0),\ v_3 = (1,1,1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a $S$.

**Esercizio 6.13.** *[8.37]* Sia $T$ la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ definita da

$$T(x,y,z) = (3x - 2y,\ x + y + z,\ 2x - 3y - z)$$

a) Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.

b) Si scriva la matrice associata a $T$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2,1,0),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\}$.

c) Trovare la distanza euclidea tra il punto $P = (1,1,1)$ e il nucleo $N(T)$.

**Esercizio 6.14.** *[8.44]* Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (0,2,2),\ (0,0,3)\}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Si scriva la matrice associata a $S$ rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.

**Esercizio 6.15.** *[9.1]* Verificare che $v = (1,0,0,1)$ è autovettore dell'applicazione lineare $T$ così definita

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

**Esercizio 6.16.** *[9.2]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x,y,z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) Verificare che i vettori $v_1 = (0,3,1)$, $v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (-1,1,0)$ sono autovettori di $T$ e determinare i rispettivi autovalori.

b) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

c) Determinare la matrice (diagonale) $D$ associata a $T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

d) Determinare la matrice diagonalizzante $P$ (cioé la matrice $P$ tale che $P^{-1}AP = D$).