CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 5– GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 5.1. *[7.49]* Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma

$$v = (a_1,\ a_1 - a_2 + 2a_3,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?
b) In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.

Esercizio 5.2. *[7.52]* Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?
b) In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.

Esercizio 5.3. *[7.54]* Sia

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.
b) Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.

Esercizio 5.4. *[7.55]* Sia

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + 4ky - 2z = 0 \right\}$$

a) Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.
b) Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.

Esercizio 5.5. *[7.59]* Sia

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 - 4x_2 - x_3 + 2kx_4 = k + 1,\ 2x_1 - kx_3 + kx_4 = 2k + 2, \\ 3x_1 - 4kx_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0 \right\}$$

a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.
b) Per i valori di k trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di S.

Esercizio 5.6. *[7.62]*

a) Sia

$$V = \langle\ (1, 2, 1),\ (-1, 3, 0),\ (3, 1, 2)\ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) Sia

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0,\ 2x + 3y + z = 0,\ x + 2z = 0 \right\}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.

Esercizio 5.7. *[7.69]* Siano dati i polinomi

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) Verificare che l'insieme $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ è una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Esprimere $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Esercizio 5.8. *[7.70]* Si considerino i polinomi $p_1 = x^2 + ax + b + c$, $p_2 = x^2 + bx + a + c$, $p_3 = x^2 + cx + a + b$.

a) Mostrare che per ogni valore dei parametri a, b, c i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi $\mathbf{R}[x]$.
b) Calcolare la dimensione e una base dello spazio $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ al variare di a, b, c.

Esercizio 5.9. *[7.71]* Sia S il sottoinsieme dello spazio dei polinomi $\mathbf{R}_3[x]$ così definito:

$$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$$

a) Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.
b) Determinare la dimensione di S.

Esercizio 5.10. *[7.81]* Sia S l'insieme delle matrici simmetriche:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{R} \right\}$$

(Notiamo anche che $S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\}$).
a) Verificare che S è un sottospazio di $M_{2\times 2}$.
b) Determinare una base di S.

Esercizio 5.11. *[7.84]* Si consideri il sottospazio

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3a + b + 3c & 2b - 6c \\ a + 3b - 7c & 4a + 8c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

dello spazio delle matrici reali $M_2(\mathbf{R})$.
a) Determinare una base di S.
b) Stabilire se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2/3 & 8/3 \end{bmatrix} \in S$ ed in caso positivo esprimere A come combinazione lineare della base trovata in a).

Esercizio 5.12. *[7.85]* Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:

$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$

a) Mostrare che S è un sottospazio di V.
b) Calcolare la dimensione e una base di S.

Esercizio 5.13. *[7.88]* Sia $W = \langle A,\ B\ , C\rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro reale k.