CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 4– GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 4.1. *[5.10]* Dati i vettori di $\mathbf{R}^3$:
$$v_1 \equiv (1,1,2),\ v_2 \equiv (2,4,6),\ v_3 \equiv (-1,2,5),\ v_4 \equiv (1,1,10)$$
determinare se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).

Esercizio 4.2. *[5.12]* Dati i vettori di $\mathbf{R}^3$:
$$v_1 \equiv (1,3,1),\ v_2 \equiv (2,k,-1),\ v_3 \equiv (-1,k-1,0),\ v_4 \equiv (1,15,7)$$
determinare per quali valori del parametro reale k, v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).

Esercizio 4.3. *[7.22]* Siano dati i segunti vettori di $\mathbf{R}^3$:
$$v_1 \equiv (1,1,1), \qquad v_2 \equiv (2,7,7), \qquad v_3 \equiv (0,k^2+2,3), \qquad v_4 \equiv (1,k+3,k^2+2).$$
Stabilire se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 al variare del parametro k.

Esercizio 4.4. *[5.17]* Date le matrici
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
stabilire se D è combinazione lineare di $A,\ B,\ C$.

Esercizio 4.5. *[5.18]* Date le matrici
$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di $A,\ B$. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Esercizio 4.6. *[7.27]* Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori:
$$v_1 \equiv (2,1,1), \qquad v_2 \equiv (-1,1,2), \qquad v_3 \equiv (3,-2,-1), \qquad v_4 \equiv (4,-1,-2).$$
Determinare una base di V. Esprimere inoltre v_1, v_2, v_3 e v_4 come combinazione lineare degli elementi di tale base.

Esercizio 4.7. *[7.25]* In $\mathbf{R}^3$ siano
$$v_1 = (k,2,1), \quad v_2 = (-2,1,0), \quad v_3 = (0,1,1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) Si stabilisca per quali valori di k i tre vettori costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$.
b) Per i valori trovati al punto a), si calcolino le coordinate del vettore $v = (-2,1,2)$ rispetto a tale base.

Esercizio 4.8. *[7.35]* Sia $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3\ \rangle$ con
$$v_1 = (k+3,\ k+3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k+2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$.
b) Si determini la dimensione una base di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 4.9. *[7.36]* Sia V lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1,-2,4,0)$, $v_2 = (2,3,-1,1)$ e $v_3 = (0,-1,3,0)$:
$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3 \rangle$$

(1) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale V.
(2) Determinare se il vettore $v_4 = (3,1,3,1)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
(3) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \rangle$.