CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 2– GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 2.1. Dati i punti i $O(0,0)$, $A(2,1)$, $C(1,3)$, determinare l'isometria $f(x,y) = (x', y')$ tale che $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ nei seguenti casi. Stabilire in particolare se si tratta di una traslazione, rotazione, riflessione e glissoriflessione trovando gli eventuali punti fissi.

a) $O' = \left(-3,\ \frac{1}{2}\right),\ A' = \left(-1,\ \frac{3}{2}\right),\ B' = \left(-2,\ \frac{7}{2}\right)$.

b) $O' = (1,\ 0),\ A' = \left(\frac{5-2\sqrt{2}}{3},\ \frac{1+4\sqrt{2}}{3}\right),\ B' = \left(\frac{4-6\sqrt{2}}{3},\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3}\right)$.

c) $O' = (0,\ 0),\ A' = \left(-\frac{2}{5},\ \frac{11}{5}\right),\ B' = \left(\frac{9}{5},\ \frac{13}{5}\right)$.

d) $O' = (-2,\ 1),\ A' = \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right),\ B' = \left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$.

Esercizio 2.2. *[1.2]* Per ognuna delle seguenti coppie di matrici A, B e scalari λ, $\mu \in \mathbf{R}$, calcolare $A+B$, $B-A$, $\lambda A + \mu B$, AB, BA, A^2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 2,\ \mu = -1$$

Esercizio 2.3. *[1.3]* Date le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A_6 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i \cdot A_j$ per $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Esercizio 2.4. *[1.5]* Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare $3A - 2B$ e AB^T.

Esercizio 2.5. *[1.6]* Calcolare la potenza A^3 della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.6. *[1.8]* Date le seguenti matrici A, calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.7. *[1.9]* Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB, BA, BC e CB.

Esercizio 2.8. *[1.10]* Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$)

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.

Esercizio 2.9. *[1.11]* Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.

Esercizio 2.10. *[1.12]* Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 2.11. *[1.13]* Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

Esercizio 2.12. *[1.18]* Si risolva il sistema $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.13. *[1.20]* Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$