CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 1– GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 1.1. *[2.2]* Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta dello spazio

(a) Passante per i punti $A(1,0,2)$ e $B(3,-1,0)$.
(b) Passante per il punto $P(1,3,1)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OQ} = (2,0,0)$.
(c) Di equazioni Cartesiane

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Esercizio 1.2. *[2.3]*

a) Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana del piano π passante per i punti $A(1,3,1)$, $B(2,0,0)$ e $C(0,1,1)$. Il punto $P(0,2,0)$ appartiene a tale piano?
b) Determinare una equazione della retta passante per A ortogonale a π.

Esercizio 1.3. *[2.4]* Sia r la retta di $\mathbf{R}^3$ passante per i punti $A(1,-1,2)$ e $B(-2,0,1)$, e sia s la retta contenente $C(1,3,-3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OD}(2,-2,3)$.

a) Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).
b) Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.

Esercizio 1.4. *[2.5]*

a) Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 2 \end{cases}$$

b) Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.

Esercizio 1.5. *[2.7]*

a) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A = (2,3,1)$ e $B = (0,0,1)$ e della retta s passante per i punti $C = (0,0,0)$ e $D = (4,6,0)$.
b) Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente r e s.

Esercizio 1.6. *[2.9]* Si considerino le rette di equazioni cartesiane

$$r: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $P(1,1,1)$ e incidente r e s.
b) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $C(1,2,-3)$ e perpendicolare a r.
c) Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (1,1,1)$ e perpendicolare alle due rette r e s.

Esercizio 1.7. *[2.10]* Sia r la retta nello spazio passante per i punti $A = (0,0,1)$ e $B = (-2,-1,0)$. Sia s la retta passante per i punti $C = (1,1,1)$ e $D = (-1,0,0)$.

a) Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.
b) Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano π del punto a).

Esercizio 1.8. *[2.13]* Si considerino i piani dello spazio

$$\pi \ : \ x - y + z = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi' \ : \ 8x + y - z = 0.$$

a) Stabilire la posizione reciproca dei due piani.
b) Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare ai piani π e π'.

Esercizio 1.9. *[2.19]* Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni

$$\begin{aligned} \pi_1 &\ : \ z - 3 = 0 \\ \pi_2 &\ : \ x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &\ : \ 3x + 3y - z + 9 = 0 \end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) Si stabilisca se il piano π_3 contiene r.
b) Si trovi un'equazione cartesiana del piano π_4 passante per l'origine e contenente r.
c) Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1.

Esercizio 1.10. *[2.21]* Si considerino la retta r di equazione

$$r \ : \ \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

e la famiglia di piani $\pi_k : \ 2x + ky - z = 1$ dove k è un parametro reale.

Si determini per quali k il piano π_k risulta parallelo a r.

Esercizio 1.11. *[2.23]* Verificare che i quattro punti

$$P_1 = (1, 2, 1), \quad P_2 = (2, 1, 0), \quad P_3 = (-1, 0, -1), \quad P_4 = (0, 0, -1)$$

sono complanari e determinare un'equazione cartesiana del piano che li contiene.

Esercizio 1.12. *[12.16]* Determinare per quali valori di k il triangolo di vertici $A_1(0, 0)$, $A_2(4, 2)$ e $A_3(1, k)$ ha area 5.

Esercizio 1.13. *[12.23]* Siano $A = (0, -1, 0)$, $B = (-2, 0, -3)$, $C = (-1, 0, -1)$ punti dello spazio.

a) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C.
b) Stabilire se il punto $D = (2, 2, 2)$ appartiene al piano contenente A, B, C.
c) Eseiste un'isometria che trasforma i punti A, B, C nei punti $O = (0, 0, 0)$, $P = (1, 0, 2)$ e $Q = (1, 1, 1)$ rispettivamente?

Esercizio 1.14. *[12.19]* Calcolare il volume del parallelepipedo di lati $u(1, 0, 0)$, $v(-3, 1, 1)$ e $w(-2, 2, 5)$.

Esercizio 1.15. *[12.20]* Siano $P_1 = (1, -1, 0), P_2 = (1, 0, -1), P_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, e $P_4 = (1, 2, 1)$ quattro punti nello spazio.

a) Calcolare l'angolo tra i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$.
b) Calcolare il volume del prisma con base il triangolo $P_1P_2P_3$ e lato il segmento P_1P_4.

Esercizio 1.16. *[12.22]* Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni:

$$\pi_1 : \ 2x - y = 1, \qquad \pi_2 : \ x + y + z = 0, \qquad \pi_3 : \ x - 2z = 1.$$

a) Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.
b) Si trovi il piano π_4 passante per l'origine e perpendicolare alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
c) Si determini l'area del triangolo di vertici A, B, C, con $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.