

# CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 1- GEOMETRIA 2008/09

**Esercizio 1.1.** [2.2] Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta dello spazio

- (a) Passante per i punti  $A(1, 0, 2)$  e  $B(3, -1, 0)$ .
- (b) Passante per il punto  $P(1, 3, 1)$  e parallela al vettore  $\overrightarrow{OQ} = (2, 0, 0)$ .
- (c) Di equazioni Cartesiane

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

**Esercizio 1.2.** [2.3]

- a) Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana del piano  $\pi$  passante per i punti  $A(1, 3, 1)$ ,  $B(2, 0, 0)$  e  $C(0, 1, 1)$ . Il punto  $P(0, 2, 0)$  appartiene a tale piano?
- b) Determinare una equazione della retta passante per  $A$  ortogonale a  $\pi$ .

**Esercizio 1.3.** [2.4] Sia  $r$  la retta di  $\mathbf{R}^3$  passante per i punti  $A(1, -1, 2)$  e  $B(-2, 0, 1)$ , e sia  $s$  la retta contenente  $C(1, 3, -3)$  e parallela al vettore  $\overrightarrow{OD}(2, -2, 3)$ .

- a) Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).
- b) Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.

**Esercizio 1.4.** [2.5]

- a) Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette  $r$  e  $r'$  di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 2 \end{cases}$$

- b) Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.

**Esercizio 1.5.** [2.7]

- a) Determinare equazioni parametriche della retta  $r$  passante per i punti  $A = (2, 3, 1)$  e  $B = (0, 0, 1)$  e della retta  $s$  passante per i punti  $C = (0, 0, 0)$  e  $D = (4, 6, 0)$ .
- b) Stabilire se  $r$  e  $s$  sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente  $r$  e  $s$ .

**Esercizio 1.6.** [2.9] Si considerino le rette di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per  $P(1, 1, 1)$  e incidente  $r$  e  $s$ .
- b) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per  $C(1, 2, -3)$  e perpendicolare a  $r$ .
- c) Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto  $P = (1, 1, 1)$  e perpendicolare alle due rette  $r$  e  $s$ .

**Esercizio 1.7.** [2.10] Sia  $r$  la retta nello spazio passante per i punti  $A = (0, 0, 1)$  e  $B = (-2, -1, 0)$ . Sia  $s$  la retta passante per i punti  $C = (1, 1, 1)$  e  $D = (-1, 0, 0)$ .

- a) Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano  $\pi$  che le contiene.
- b) Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano  $\pi$  del punto a).

**Esercizio 1.8.** [2.13] Si considerino i piani dello spazio

$$\pi : x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad \pi' : 8x + y - z = 0.$$

- Stabilire la posizione reciproca dei due piani.
- Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per  $P = (1, 1, 1)$  e perpendicolare ai piani  $\pi$  e  $\pi'$ .

**Esercizio 1.9.** [2.19] Si considerino i piani  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  di equazioni

$$\begin{aligned} \pi_1 &: z - 3 = 0 \\ \pi_2 &: x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: 3x + 3y - z + 9 = 0 \end{aligned}$$

e la retta  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ .

- Si stabilisca se il piano  $\pi_3$  contiene  $r$ .
- Si trovi un'equazione cartesiana del piano  $\pi_4$  passante per l'origine e contenente  $r$ .
- Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano  $\pi_1$ .

**Esercizio 1.10.** [2.21] Si considerino la retta  $r$  di equazione

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

e la famiglia di piani  $\pi_k : 2x + ky - z = 1$  dove  $k$  è un parametro reale.

Si determini per quali  $k$  il piano  $\pi_k$  risulta parallelo a  $r$ .

**Esercizio 1.11.** [2.23] Verificare che i quattro punti

$$P_1 = (1, 2, 1), \quad P_2 = (2, 1, 0), \quad P_3 = (-1, 0, -1), \quad P_4 = (0, 0, -1)$$

sono complanari e determinare un'equazione cartesiana del piano che li contiene.

**Esercizio 1.12.** [12.16] Determinare per quali valori di  $k$  il triangolo di vertici  $A_1(0, 0)$ ,  $A_2(4, 2)$  e  $A_3(1, k)$  ha area 5.

**Esercizio 1.13.** [12.23] Siano  $A = (0, -1, 0)$ ,  $B = (-2, 0, -3)$ ,  $C = (-1, 0, -1)$  punti dello spazio.

- Calcolare l'area del triangolo di vertici  $A, B, C$ .
- Stabilire se il punto  $D = (2, 2, 2)$  appartiene al piano contenente  $A, B, C$ .
- Eseiste un'isometria che trasforma i punti  $A, B, C$  nei punti  $O = (0, 0, 0)$ ,  $P = (1, 0, 2)$  e  $Q = (1, 1, 1)$  rispettivamente?

**Esercizio 1.14.** [12.19] Calcolare il volume del parallelepipedo di lati  $u(1, 0, 0)$ ,  $v(-3, 1, 1)$  e  $w(-2, 2, 5)$ .

**Esercizio 1.15.** [12.20] Siano  $P_1 = (1, -1, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0, -1)$ ,  $P_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ , e  $P_4 = (1, 2, 1)$  quattro punti nello spazio.

- Calcolare l'angolo tra i vettori  $\overrightarrow{P_1P_2}$  e  $\overrightarrow{P_2P_3}$ .
- Calcolare il volume del prisma con base il triangolo  $P_1P_2P_3$  e lato il segmento  $P_1P_4$ .

**Esercizio 1.16.** [12.22] Si considerino i piani  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  di equazioni:

$$\pi_1 : 2x - y = 1, \quad \pi_2 : x + y + z = 0, \quad \pi_3 : x - 2z = 1.$$

- Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.
- Si trovi il piano  $\pi_4$  passante per l'origine e perpendicolare alla retta  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ .
- Si determini l'area del triangolo di vertici  $A, B, C$ , con  $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ ,  $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$ ,  $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$ .