CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 11 – GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 11.1 (13.14)**.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare autovalori e autovettori di A.*
b) *Calcolare una matrice diagonalizzante di A, che sia ortogonale e rappresenti una rotazione dello spazio attorno all'origine.*
c) *Scrivere la forma canonica della conica $\mathcal{C}$ con matrice associata A*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = -1, 1, 3$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E(1) = N(M - I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E(3) = N(M - 3I): \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle (0,1,1) \rangle$$

$$E(-1) = N(M + I): \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(-1) = \langle (0,-1,1) \rangle$$

b) Gli autovettori trovati, essendo relativi a autovalori distinti, sono già ortogonali tra loro. E' quindi sufficiente renderli di norma 1 per ottenere la matrice diagonalizzante ortogonale di rotazione:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c) $\det(A) = -3$, quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre l'autovalore della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ associata alla forma quadratica è $\lambda = 1$ doppio. Si tratta quindi di un'ellisse e cerchiamo un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + t = 0$ a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $\det(A) = \det(B)$ otteniamo $t = -3$. Infine la forma canonica della conica (ellisse reale) è

$$x^2 + y^2 - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 1 = 0$$

Notiamo che si tratta in realtà di una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{3}$.

□

Esercizio 11.2 (8.16)**.** *Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^4$*

$$T(x,y,z,w) = (-x + z,\ 2y,\ x - 2z,\ w)$$

a) *Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.*
b) *Si determini l'inversa T^{-1}.*

Soluzione:
Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla matrice identica:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} -I \\ \\ III+I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} I-III \\ 1/2II \\ -III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

a) La matrice $M(T)$ ha rango 4, quindi $\mathrm{Im}(T)$ ha dimensione 4 e T è suriettiva. Analogamente il nucleo di T ha dimensione $4-\mathrm{rg}(A) = 0$, quindi T e iniettiva. Poiché T è sia iniettiva che suriettiva, T è biiettiva e quindi invertibile.
b) La matrice $M\left(T^{-1}\right)$ associata all'endomorfismo T^{-1} è l'inversa della matrice $M(T)$. Dai calcoli precedenti

$$M\left(T^{-1}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T^{-1}(x,y,z,w) = \left(-2x - z,\ \frac{1}{2}y,\ -x - z,\ w\right)$$

□

Esercizio 11.3 (8.51)**.** *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (0,2,2), \quad v_3 = (1,1,0),$$

si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definita da*

$$T(v_1) = (2,0,0), \quad T(v_2) = (4,4,4), \quad T(v_3) = (0,6,6)$$

a) *Si determini la matrice* $M(T)$ *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini una base del nucleo e dell'immagine di* T*.*

Soluzione:

a) Per determinare la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica. A tale scopo dobbiamo prima esprimere i vettori della base canonica come combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$. Risolviamo le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$, $i = 1,2,3$, riducendo a gradini contemporaneamente le matrici associate ai tre sistemi:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Di conseguenza

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \;\Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ 2y + z = 0 \\ -2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \; e_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \;\Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + z = 1 \\ -2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \; e_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \;\Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \; e_3 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - \frac{1}{2}v_3$$

Sfruttando la linearità di T possiamo ora ricavare le immagini degli elementi della base canonica:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= \frac{1}{2}T(v_1) - \frac{1}{4}T(v_2) + \frac{1}{2}T(v_3) = (0, 2, 2) \\ T(e_2) &= -\frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{4}T(v_2) + \frac{1}{2}T(v_3) = (0, 4, 4) \\ T(e_3) &= \frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{4}T(v_2) - \frac{1}{2}T(v_3) = (2, -2, -2) \end{aligned}$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

In alternativa si poteva untilizzare la matrice di cambiamento di base:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Infine

$$M(T) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo $M(T)$ a gradini:

$$\begin{array}{c} 1/2II \\ 1/2I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $M(T)$ ha rango 2 e una base dell'immagine di T è

$$\mathcal{B}\left(\mathrm{Im}(T)\right) = \{(0, 2, 2),\ (2, -2, -2)\}$$

Risolvendo il sistema omogeneo associato a T otteniamo

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi una base del nucleo di T è

$$\mathcal{B}\left(\mathrm{N}(T)\right) = \{(-2, 1, 0)\}$$

□

Esercizio 11.4 (11.9)**.** *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$

$$T(x, y, z) = (ax,\ bx + y + z,\ y + z)$$

con a e b parametri reali.

a) *Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in* $\mathbf{R}$.
b) *Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori di T.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice $A = M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = (a - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda = a, 0, 2$.

a) Se $a \neq 0, 2$, T ha tre autovalori singoli, quindi è sicuramente diagonalizzabile.

Se $a = 0$, l'autovalore $\lambda = 0$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(0)$:

$$E(0) = \mathrm{N}(A) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - III \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere due casi

– Se $a = 0$ e $b = 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
– Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Analogamente se $a = 2$, l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo quindi distinguere due casi

– Se $a = 2$ e $b = 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
– Se $a = 2$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Infine T è daigonalizzabile se $a \neq 0, 2$ per ogni valore di b, oppure se $a = 0$ o $a = 2$ e $b = 0$.

b) Per $a = b = 0$ abbiamo già in sostanza calcolato l'autospazio

$$E(0) = \langle (0, 1, -1),\ (1, 0, 0) \rangle$$

Notiamo che i due generatori trovati sono già tra loro ortogonali, quindi si tratterà solamente di renderli di norma 1.

Analogamente per $a = b = 0$ otteniamo:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Infine la base ortonormale cercata è

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (1, 0, 0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 11.5 (12.24)**.** *Siano $M = (1, 1, 1)$, $N = (3, 2, 1)$, $L = (1, 2, 2)$ punti dello spazio $\mathbf{R}^3$. Sia $C = (-1, 0, 1)$.*

a) *Si calcoli l'area del triangolo MNL.*
b) *Si determini l'insieme $M'N'L'$ che si ottiene proiettando il triangolo MNL dal centro C sul piano $x + y = 0$.*
c) *Si calcoli l'area del triangolo $M'N'L'$.*

Soluzione:

a) L'area del triangolo di vertici MNL è la metà dell'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{LN}$, dove

$$u = \overrightarrow{MN} = (2, 1, 0), \qquad v = \overrightarrow{LN} = (2, 0, -1)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogrammo cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -i + 2j - 2k = (-1, 2, -2)$$

Infine
$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2}|u \times v| = \frac{1}{2}|(-1,2,-2)| = \frac{3}{2}$$

In alternativa si poteva calcolare l'altezza del triangolo di base LN sfruttando la proiezione del vettore $u = \overrightarrow{MN}$ su $v = \overrightarrow{LN}$:
$$pr_v(u) = \frac{(u,v)}{(v,v)}v = \frac{4}{5}(2,0,-1)$$
Il vettore $u - pr_v(u) = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)$ è ortogonale a v e corrisponde all'altezza del triangolo di base v. Quindi
$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2} \cdot |(2,0,-1)| \cdot |\left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

b) Il vettore delle coordinate omogenee del piano è $P = (1,1,0,0)$ e il punto C ha coordinate omogenee $C = (-1,0,1,1)$. La matrice di proiezione è quindi
$$A = P^TC - (P \cdot C)I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Quindi
$$M \cdot A = (-1,1,3,3) \quad \Rightarrow \quad M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$
$$N \cdot A = (-2,2,6,6) \quad \Rightarrow \quad N' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$
$$L \cdot A = (-2,2,5,4) \quad \Rightarrow \quad L' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4},\right)$$
Quindi il triangolo viene proiettato nel segmento $M'L'$.

In alternativa si potevano calcolare le proiezioni senza utilizzare la matrice A. Per esempio per calcolare M' si poteva calcolare la retta
$$CM: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}$$
Il punto M' è dato dall'intersezione tra la retta CM e il piano $x+y=0$:
$$M': \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1 \\ 1+2t+1+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$
Analogamente si potevano ottenere gli altri punti.

c) Il triangolo $M'N'L'$ è degenere, quindi ha area nulla.

□

Esercizio 11.6 (13.16)**.** *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*
$$\mathcal{C}: \; 3x^2 + 14xy - 5y^2 - 10x + 14y = 0$$

a) *Stabilire il tipo di conica.*
b) *Nel caso sia una conica a centro, trovare le coordinate del centro.*
c) *(Facoltativo) Trovare equazioni degli eventuali asintoti della conica.*

Soluzione:

a) Le matrici A' e A associate alla conica sono:
$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 7 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

La matrice A' ha determinante non nullo, quindi si tratta di una conica non degenere; inoltre $\det(A) = -64 < 0$, quindi si tratta di un'iperbole.

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema $Ax = -h$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & | & 5 \\ 7 & -5 & | & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II - 7I \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & | & 5 \\ 0 & -64 & | & -56 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{8} \\ y = \frac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

c) Gli asintoti sono rette passanti per il centro, di direzione parallela ai punti all'infinito della conica. L'equazione della conica in coordinate omogenee è $3X^2 + 14XY - 5Y^2 - 10XZ + 14YZ = 0$. Ponendo $Z = 0$ otteniamo l'equazione $3X^2 + 14XY - 5Y^2 = 0$ le cui soluzioni sono

$$\frac{X}{Y} = \frac{-7 \pm 8}{3}$$

cioè le due rette $x + 5y = 0$ e $3x - y = 0$. Infine gli asintoti (passanti per il centro) sono le rette

$$a_1 : \ x + 5y - 4 = 0 \qquad a_2 : \ 3x - y + 2 = 0$$

□

Esercizio 11.7. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definita da*

$$T(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ kx_1 + 3x_2 - 3x_3)$$

a) *Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di T al variare di k.*
b) *Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettivae/o suriettiva.*
c) *Esistono valori di k per i quali il vettore $v(1, 1, 0, 0)$ appartiene all'immagine di T?*

Soluzione:

La matrice associata a T è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ k & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Per rispondere alle domande a) e b) dobbiamo calcolare il rango di A. Per rispondere alla domanda c) dobbiamo stabilire se il sistema $A|v$ ha soluzione. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|v$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ k & 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \\ IV - kIII \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 3+k & -3-k & | & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto della riduzione siamo già in grado di risponedere alle prime due domande.

a,b) A contiene la sottomatrice formata dalle sue prime tra righe di rango 3, quindi per ogni k

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 < 4 \text{ e } T \text{ non è suriettiva.}$$
$$\dim(N(T)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 0 \text{ e } T \text{ è iniettiva.}$$

c) Completiamo la riduzione:

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ IV - (k+3)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -6-2k & | & -k-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - (6+2k)III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & k+3 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha soluzione se $\mathrm{rg}(A|v) = 3$, quindi $v \in \mathrm{Im}(T)$ se $k = -3$.

In alternativa, anzicchè completare la riduzione, si poteva calcolare $\det(A|v)$ (parzialmente ridotta) e imporre che questo si annullasse.

□

Esercizio 11.8 (9.27)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se 4 è autovalore di A. Calcolare gli autovalori e autovettori di A.*
b) *La matrice A è diagonalizzabile per similitudine? In caso affermativo, indicare una matrice diagonalizzante.*

c) *Sia C la matrice dipendente da $t \in \mathbf{R}$:*

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Esistono valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui A e C siano simili?

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 & -1 \\ 2 & 7-\lambda & -1 \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} &= (6-\lambda)\left[(7-\lambda)(3-\lambda)+3\right] - 3\left[6-2\lambda+2\right] + \left[6-14+2\lambda\right] = \\ &= (6-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+24) - 3(8-2\lambda) - (2\lambda-8) = \\ &= (6-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-4) + 6(\lambda-4) - 2(\lambda-4) = \\ &= (\lambda-4)\left[(6-\lambda)(\lambda-6)+6-2\right] = -(\lambda-4)(\lambda^2-12\lambda+32) \end{aligned}$$

a) Gli autovalori di A sono $\lambda = 4$ (doppio) e $\lambda = 8$. Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(4) = N(A-4I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2x+3y-z=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$E(4) = \langle\ (-3,2,0),\ (1,0,2)\ \rangle$

$$E(8) = N(A-8I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \\ II-I \\ III+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$E(8) = \langle\ (1,1,1)\ \rangle$

b) A è diagonalizzabile perché la molteplicitá algebrica e geometrica dei sui autovalori coincidono. La matrice diagonalizzante è:

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Poichè A è diagonalizzabile, A e C sono simili se anche C ha gli stessi autovalori di A ed è anch'essa diagonalizzabile (cioè sono simili alla stessa matrice diagonale). Perchè A e C abbiano gli stessi autovalori ($\lambda = 4$ doppio, e $\lambda = 8$) deve essere $t = 8$. Inoltre per tale valore l'autospazio $E(4)$ di C è

$$E_C(4) = N(C-4I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_C(4) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle \Rightarrow \dim(E_C(4)) = 1$$

Di conseguenza C non è diagonalizzabile e A e C non sono mai simili.

$\square$

Esercizio 11.9 (11.15)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo avente come autovettori i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$, rispetto agli autovalori $1,1,2$.*

a) *Calcolare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica.*
b) *T è invertibile?*
c) *T è un endomorfismo simmetrico?*

Soluzione:

Poiché v_1 è autovettore rispetto a $\lambda = 1$, otteniamo che $T(v_1) = v_1$. Analogamente $T(v_2) = v_2$ e $T(v_3) = 2v_3$. Di conseguenza

$$T(v_1) = (1,1,0), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (0,0,2)$$

a) Dobbiamo trovare le immagini della base canonica. Notiamo che

$$\begin{aligned} e_3 &= v_3 \\ e_2 &= v_2 - v_3 \\ e_1 &= v_1 - e_2 = v_1 - v_2 + v_3 \end{aligned}$$

Per la linearità di T otteniamo che

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T(v_3) = (0,0,2) \\ T(e_2) &= T(v_2) - T(v_3) = (0,1,1) - (0,0,2) = (0,1,-1) \\ T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) + T(v_3) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,2) = (1,0,1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

In alternativa per calcolare A si poteva utilizzare la matrice diagonalizzante P che ha per colonne gli autovettori, e la matrice diagonale D che ha gli autovalori sulla diagonale. Dalla relazione $P^{-1}AP = D$ si ricava $A = PDP^{-1}$.

b) T è invertibile se lo è A. Poiché $\det(A) = -2 \neq 0$, A e T sono invertibili.

c) T non è simmetrico perché A, che è associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica, non lo è.

$\square$

Esercizio 11.10 (10.19). *Siano $v_1 = (2,1,1,0)$ e $v_2 = (-1,1,2,0)$ e sia $V = \langle v_1,\ v_2 \rangle \subset \mathbf{R}^4$.*

a) *Calcolare l'angolo tra v_1 e v_2.*

b) *Trovare una base del complemento ortogonale di V.*

Soluzione:

a) Indichiamo con ϑ l'angolo tra v_1 e v_2. Sappiamo che

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v_1, v_2)}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta = \arccos\left(\frac{1}{6}\right)$$

b) Il complemento ortogonale di V è lo spazio

$$\begin{aligned} V^\perp &= \left\{ v = (x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid (v, v_1) = (v, v_2) = 0 \right\} \\ &= \left\{ v = (x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, \quad -x + y + 2z = 0 \ \right\} \end{aligned}$$

Risolviamo il sistema di due equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow_{2II + I} \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{5}{3}t \\ z = t \\ w = s \end{cases}$$

Infine una base di $V^\perp$ è

$$\mathcal{B}\left(V^\perp\right) = = \{ \ (1, -5, 3, 0), \ (0,0,0,1) \ \}$$

$\square$