## CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 10 – GEOMETRIA 2008/09

**Esercizio 10.1** (11.1)**.** [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Calcolare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori per le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice $A$ calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2\cdot 2(-1-\lambda) = (-1-\lambda)[(1-\lambda)(1-\lambda) - 4] \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \end{aligned}$$

Gli autovalori di $A$ sono i valori di $\lambda$ per cui $p_A(\lambda) = 0$, quindi

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{(doppio)}, \qquad\qquad \lambda_2 = 3$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = -1$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A + I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow\ 2x + 2y = 0\ \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}\ \Rightarrow \quad E(-1) = \langle (-1, 1, 0),\ (0, 0, 1) \rangle$$

  Poichè dalla teoria sappiamo che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili, ci aspettavamo che l'autovalore $\lambda = -1$ avesse molteplicità geometrica 2.

- $\lambda = 3$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A - 3I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 2 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}\ \Rightarrow \quad E(3) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

Siano

$$v_1 = (-1, 1, 0), \qquad v_2 = (0, 0, 1), \qquad v_3 = (1, 1, 0)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo $A$ una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Inoltre, in questo caso, anche i due autovettori relativi allo stesso autovalore $\lambda = -1$ risultano ortogonali: $(v_1, v_2) = 0$. Per determinare la base ortonormale richiesta è quindi sufficiente normalizzare i tre vettori $v_1$, $v_2$ e $v_3$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = (0, 0, 1) \qquad\qquad \Rightarrow \qquad \text{la base cercata è} \quad \mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\} \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \right) \end{aligned}$$

Ripetiamo ora l'esercizio con la matrice $B$. Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice $B$ calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda)-1] - 3\cdot 3(1-\lambda) = (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda)-1-9] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-12) \end{aligned}$$

Gli autovalori di $B$ sono i valori di $\lambda$ per cui $p_B(\lambda)=0$, quindi

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = -4$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = 1$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo asociato a $B - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 3y = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow\ E(1) = \langle (1,0,3) \rangle$$

- $\lambda = 3$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo asociato a $B - 3I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2II + 3I \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(3) = \langle (-3,-2,1) \rangle$$

- $\lambda = -4$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo asociato a $B + 4I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 5II + -3I \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(-4) = \langle (-3,5,1) \rangle$$

Siano

$$v_1 = (1,0,3), \qquad v_2 = (-3,-2,1), \qquad v_3 = (-3,5,1)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo $B$ una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Per determinare la base ortonormale richiesta si tratta quindi di normalizzare i tre vettori $v_1,\ v_2$ e $v_3$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ 0,\ \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}}\right) \qquad \Rightarrow \quad \text{la base cercata è} \quad \mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\} \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{35}},\ \frac{5}{\sqrt{35}},\ \frac{1}{\sqrt{35}}\right) \end{aligned}$$

□

**Esercizio 10.2** (11.2)**.** *Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche $A$ si determini una matrice ortogonale $P$ per la quale $P^TAP$ sia diagonale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Poichè entrambe le matrici $A$ sono simmetriche, sappiamo dalla teoria che sono sicuramente diagonatizzabili. Si tratta di

(1) Determinare gli autovettori di $A$,
(2) Determinare una base ortonormale a partire dagli autovettori (linearmente indipendenti) di $A$,
(3) Scrivere la matrice $P$ che ha per colonne gli elementi della base trovata.

La matrice $P$ cosí determinata è diagonalizzante e ortogonale.

Consideriamo prima la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(1) $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 \Rightarrow$ autovalori: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3$

- $\lambda = 2$. Consideriamo $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(2) = \langle\ (2,1)\ \rangle$$

- $\lambda = -3$. Consideriamo $A + 3I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(-3) = \langle\ (1,-2)\ \rangle$$

(2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distini sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$v_1 = (2,1), \qquad v_2 = (1,-2) \qquad \Rightarrow$$
$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \Rightarrow$ autovalori: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$

- $\lambda = 1$. Consideriamo $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(1) = \langle\ (1,1,0)\ \rangle$$

- $\lambda = 3$. Consideriamo $A - 3I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{2III + I}{} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(3) = \langle\ (-1,1,-2)\ \rangle$$

- $\lambda = 0$. Consideriamo $A - 0I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{III - I}{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(0) = \langle\ (-1,1,1)\ \rangle$$

(2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distini sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1,1,0) & & & u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)\\
v_2 &= (-1,1,-2) & &\Rightarrow & u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\\
v_3 &= (-1,1,1) & & & u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

(3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 10.3** (11.7)**.** *Si consideri la matrice reale simmetrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *costituita da autovettori di* $A$.
b) *Determinare una matrice ortogonale* $P$ *tale che* $P^T AP$ *sia diagonale.*

Soluzione:
Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right] - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$$

Quindi gli autovalori di $A$ sono:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 3 \quad \text{singoli}$$

Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow II - I \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \qquad E(0) = \langle (1,-1,-1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(1)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(1) = \langle (1,0,1) \rangle$$

Calcoliamo infine l'autospazio $E(3)$ relativo all'autovalore $\lambda_3 = 3$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 3I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2II + I \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x+y=0 \\ -y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow E(3) = \langle (-1,-2,1) \rangle$$

a) Gli autovettori trovati sono tutti ortogonali tra loro (anche perchè appartengono a autospazi distinti), quindi per determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ è sufficiente normalizzarli:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}},\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}},\right), \right\}$$

b) La matrice $P$ cercata ha per colonne i vettori della base di $\mathbf{R}^3$ trovata:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 10.4** (11.10)**.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}$. $T$ è un endomorfismo simmetrico?*

Soluzione:

Notiamo che la base $\mathcal{B}$ non è una base ortonormale, quindi il fatto che $A$ non sia simmetrica non implica che non lo sia $T$. Per potere utilizzare questa implicazione dobbiamo scrivere la matrice associata a $T$ rispetto a una base ortonormale, in particolare rispetto alla base canonica. Per comodità assegnamo un nome ai tre vettori della base $\mathcal{B}$:

$$v_1 = (1,1,1), \qquad v_2 = (1,1,0), \qquad v_3 = (1,0,1)$$

Dalla matrice $A$ ricaviamo le immagini degli elementi della base $\mathcal{B}$, ricordando però che tali elementi sono ancora espressi rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,1,1) = (2,2,0)_\mathcal{B} \\ T(v_2) &= T(1,1,0) = (2,3,-1)_\mathcal{B} \\ T(v_3) &= T(1,0,1) = (1,0,1)_\mathcal{B} \end{aligned}$$

Per calcolare le immagini della base canonica dobbiamo prima esprimere $e_1,\ e_2,\ e_3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Notiamo che data la semplicità dei calcoli non è necessario impostare e risolvere i tre sistemi associati alle equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$. E' infatti immediato ricavare che

$$\begin{aligned} e_3 &= (1,1,1) - (1,1,0) = v_1 - v_2 = (1,-1,0)_\mathcal{B} \\ e_2 &= (1,1,1) - (1,0,1) = v_1 - v_3 = (1,0,-1)_\mathcal{B} \\ e_1 &= (1,1,0) - e_2 = v_2 - v_1 + v_3 = (-1,1,1)_\mathcal{B} \end{aligned}$$

Quindi sfruttando la linearità di $T$:

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T(v_1) - T(v_2) = (2,2,0)_\mathcal{B} - (2,3,-1)_\mathcal{B} = (0,-1,1)_\mathcal{B} = -v_2 + v_3 = (0,-1,1) \\ T(e_2) &= T(v_1) - T(v_3) = (2,2,0)_\mathcal{B} - (1,0,1)_\mathcal{B} = (1,2,-1)_\mathcal{B} = v_1 + 2v_2 - v_3 = (2,3,0) \\ T(e_1) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = (2,3,-1_\mathcal{B}) - (2,2,0)_\mathcal{B} + (1,0,1)_\mathcal{B} = (1,1,0)_\mathcal{B} = v_1 + v_2 = (2,2,1) \end{aligned}$$

La matrice $B$ associata a $T$ rispetto alla base (ortonormale) canonica è quindi:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poichè $B$ non è simmetrica, anche non $T$ è un endomorfismo simmetrico.

Notiamo che per calcolare $B$ potevamo in alternativa usare la matrice di cambiamento di base. Indichiamo con $P$ è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$, cioè $P = M_\mathcal{B}^\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori $v_1, v_2$ e $v_3$ (espressi rispetto alla base canonica).La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è la matrice inversa di $P$: $P^{-1} = M_\mathcal{C}^\mathcal{B}$. Poiché $A = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(T)$ e $B = M(T) = M_\mathcal{C}^\mathcal{C}(T)$ abbiamo la seguente relazione:

$$M(T) = M_\mathcal{C}^\mathcal{C}(T) = M_\mathcal{B}^\mathcal{C} M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(T) M_\mathcal{C}^\mathcal{B} \qquad \Rightarrow \qquad B = PAP^{-1}$$

□

**Esercizio 10.5** (11.11)**.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

*rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}.$$

a) *$T$ è un endomorfismo simmetrico?*
b) *$T$ è diagonalizzabile?*

SOLUZIONE:

a) Notiamo che la base $\mathcal{B}$ non è una base ortonormale, quindi il fatto che $A$ non sia simmetrica non implica che non lo sia $T$. Per potere utilizzare questa implicazione dobbiamo scrivere la matrice associata a $T$ rispetto a una base ortonormale, in particolare rispetto alla base canonica. Per fare questo possiamo procedere in due modi
   (1) Ricavare le immagini di $e_1,\ e_2$ e $e_3$ utlizzando la matrice $A$, dopo avere espresso $e_i$ rispetto a $\mathcal{B}$ e ricordando che i risultati ottenuti saranno ancora espressi rispetto a $\mathcal{B}$.
   (2) Ricavare direttamente le immagini di $e_1,\ e_2$ e $e_3$ sfruttando la linearità di $T$.

   Consideriamo entrambi i metodi
   (1) Se vogliamo utilizzare direttamente la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ dobbiamo scrivere $e_1,\ e_2$ e $e_3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Chiamiamo $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (1,0,1)$ i tre vettori di $\mathcal{B}$; si tratta quindi di risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ con $i = 1,2,3$. Riduciamo a gradini la matrice associata alle tre equazioni contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ -III \\ -II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Possiamo ora risolvere i tre sistemi.

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow e_1 = (-1,1,1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow e_2 = (1,0,-1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow e_3 = (1,-1,0)_{\mathcal{B}}$$

   Possiamo usare ora la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ per calcolare le imamgini di $e_i$, ricordando però che il risultato ottenuto è ancora espresso rispetto rispetto a $\mathcal{B}$, mentre noi dobbiamo esprimerlo rispetto alla base canonica:

$$\begin{aligned} T(e_1) = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot e_1 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (-2,2,1)_{\mathcal{B}} = -2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (1,0,-1) \\ T(e_2) = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot e_2 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= (3,-1,-2)_{\mathcal{B}} = 3 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3 = (0,2,1) \\ T(e_3) = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot e_3 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= (5,-4,-2)_{\mathcal{B}} = 5 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3 = (-1,1,3) \end{aligned}$$

Infine la matrice $B$ associata a $T$ rispetto alla base (ortonormale) canonica è

$$B = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) In alternativa possiamo ricavare direttamente le immagini di $e_1$ dalla matrice $A = M_{\mathcal{B}}(T)$, sfruttando la linearità di $T$. Sappiamo infatti che una matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ espressi ancora rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (6,-3,-3)_{\mathcal{B}} \\ T(1,1,0) &= (1,1,-1)_{\mathcal{B}} \\ T(1,0,1) &= (3,-2,-1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Sfruttando la linearità di $T$:

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= T(1,1,1) - T(1,1,0) = (6,-3,-3)_{\mathcal{B}} + (-1,-1,1)_{\mathcal{B}} = (5,-4,-2)_{\mathcal{B}} \\ &= 5 \cdot (1,1,1) - 4 \cdot (1,1,0) - 2 \cdot (1,0,1) = (-1,1,3) \\ T(1,0,0) &= T(1,0,1) - T(0,0,1) = (3,-2,-1)_{\mathcal{B}} + (-5,4,2)_{\mathcal{B}} = (-2,2,1)_{\mathcal{B}} \\ &= -2 \cdot (1,1,1) + 2 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (1,0,1) = (1,0,-1) \\ T(0,1,0) &= T(1,1,0) - T(0,1,0) = (1,1,-1)_{\mathcal{B}} + (2,-2,-1)_{\mathcal{B}} = (3,-1,-2)_{\mathcal{B}} \\ &= 3 \cdot (1,1,1) - 1 \cdot (1,1,0) - 2 \cdot (1,0,1) = (0,2,1) \end{aligned}$$

La matrice $B$ associata a $T$ rispetto alla base (ortonormale) canonica è quindi:

$$B = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Poichè $B$ è simmetrica, anche $T$ è un endomorfismo simmetrico.

b) $T$ è sicuramente diagonalizzabile perchè è simmetrica.

□

**Esercizio 10.6** (11.15)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo avente come autovettori i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$, rispetto agli autovalori $1, 1, 2$.*

a) *Calcolare la matrice $A$ che rappresenta $T$ rispetto alla base canonica.*
b) *$T$ è invertibile?*
c) *$T$ è un endomorfismo simmetrico?*

Soluzione:

Poiché $v_1$ è autovettore rispetto a $\lambda = 1$, otteniamo che $T(v_1) = v_1$. Analogamente $T(v_2) = v_2$ e $T(v_3) = 2v_3$. Di conseguenza

$$T(v_1) = (1,1,0), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (0,0,2)$$

a) Dobbiamo trovare le immagini della base canonica. Notiamo che

$$\begin{aligned} e_3 &= v_3 \\ e_2 &= v_2 - v_3 \\ e_1 &= v_1 - e_2 = v_1 - v_2 + v_3 \end{aligned}$$

Per la linearità di $T$ otteniamo che

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T(v_3) = (0,0,2) \\ T(e_2) &= T(v_2) - T(v_3) = (0,1,1) - (0,0,2) = (0,1,-1) \\ T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) + T(v_3) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,2) = (1,0,1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice che rappresenta $T$ rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

In alternativa per calcolare $A$ si poteva utilizzare la matrice diagonalizzante $P$ che ha per colonne gli autovettori, e la matrice diagonale $D$ che ha gli autovalori sulla diagonale. Dalla relazione $P^{-1}AP = D$ si ricava $A = PDP^{-1}$.

b) $T$ è invertibile se lo è $A$. Poiché $\det(A) = -2 \neq 0$, $A$ e $T$ sono invertibili.
c) $T$ non è simmetrico perché $A$, che è associata a $T$ rispetto alla base (ortonormale) canonica, non lo è.

□

**Esercizio 10.7** (11.13)**.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ 2x_2 + \sqrt{3}x_3,\ \sqrt{3}x_2)$$

a) *Stabilire se $T$ è invertibile.*
b) *Mostrare che $T$ è un endomorfismo simmetrico.*
c) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizza $T$.*

Soluzione:
La matrice associata a $T$ rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

a) $T$ è invertibile se è invertibile la matrice $A$, cioè se $A$ ha determinante non nullo:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-3) = -6 \neq 0$$

b) La matrice associata a $T$ rispetto alla base canonica (che è ortonormale) è simmetrica: $A^T = A$, quindi $T$ è un endomorfismo simmetrico.
c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(-\lambda) - 3] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di $A$ sono $\lambda = 2,\ -1,\ 3$.
Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(2) = N(A - 2I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}z = 0 \\ \sqrt{3}y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ E(2) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E(-1) = N(A + I): \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\sqrt{3}III - II} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 3y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -\frac{3}{\sqrt{3}}t = -\sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow\ E(-1) = \langle (0, 1, -\sqrt{3}) \rangle$$

$$E(3) = N(A - 3I): \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{III + \sqrt{3}II} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow\ E(3) = \langle (0, \sqrt{3}, 1) \rangle$$

Essendo tre autospazi distinti i tre autovalori generatori trovati sono tra loro ortogonali. Per ottenere la base ortonormale cercata basta quindi prendere i generatori di norma 1:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

□

**Esercizio 10.8** (13.4). *Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x,y)=0$:*

(1) $9x^2+4xy+6y^2-10=0$

(2) $x^2+6xy+y^2+2x+y+\dfrac{1}{2}=0$

(3) $5x^2+5y^2-6xy+16\sqrt{2}x+38=0$

(4) $25x^2-7y^2+48y+7=0$

(5) $x^2+4xy+4y^2-6x+1=0$

*Per ognuna di esse:*

a) *Determinare la matrice $A$ della forma quadratica associata alla conica.*
b) *Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.*
c) *Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi. Se si tratta di una parabola, determinarne il vertice e l'asse.*

Soluzione:

(1) Consideriamo l'equazione $9x^2+4xy+6y^2=10$.

a) Le matrici associate alla conica sono
$$A'=\begin{bmatrix}9&2&0\\2&6&0\\0&0&-10\end{bmatrix}\quad \text{e}\quad A=\begin{bmatrix}9&2\\2&6\end{bmatrix}\ \text{associata alla forma quadratica}$$
Notiamo che $I_3=\det(A')\neq 0$, quindi la conica è non degenere.

b) Possiamo calcolare il determinante di $A$, oppure determinarne gli autovalori:
$$I_2=\det(A)=50>0 \qquad \Rightarrow \text{ si tratta di un'ellisse}$$
Oppure:
$$p_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix}9-\lambda&2\\2&6-\lambda\end{bmatrix}=(9-\lambda)(6-\lambda)-4=\lambda^2-15\lambda+50$$
Quindi $A$ ha due autovalori concordi( $\lambda_1=10,\ \lambda_2=5$), $I_2=10\cdot 5>0$ e si tratta di un'ellisse.

c) Per determinare il centro risolviamo il sistema
$$A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+h=0\ \Rightarrow\ A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=-h$$
dove
$$h=\begin{bmatrix}1/2 \text{ coeff. della } x\\1/2 \text{ coeff. della } y\end{bmatrix}$$
ovvero il sistema associato alla matrice
$$\begin{bmatrix}9&2&|&0\\2&6&|&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}1/2II\\I\end{matrix}\begin{bmatrix}1&3&|&0\\9&2&|&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\\II-9I\end{matrix}\begin{bmatrix}1&3&|&0\\0&-25&|&0\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\ \Rightarrow\ C=(0,0)$$
Potevamo notare che il centro della conica è $(0,0)$ osservando che nell'equazione mancano i termini $x$ e $y$ che indicano la traslazione.

Gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione gli autovettori di $A$. Dobbiamo quindi prima determinare gli autovettori: Calcoliamo l'autospazio $E(10)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-10I$:
$$\begin{bmatrix}-1&2&|&0\\2&-4&|&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\\II+2I\end{matrix}\begin{bmatrix}-1&2&|&0\\0&0&|&0\end{bmatrix}\Rightarrow\ -x+2y=0\ \Rightarrow\begin{cases}x=2t\\y=t\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ E(10)=\langle(2,1)\rangle$$
Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-5I$:
$$\begin{bmatrix}4&2&|&0\\2&1&|&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}1/2I\\2II-I\end{matrix}\begin{bmatrix}2&1&|&0\\0&0&|&0\end{bmatrix}\Rightarrow\ 2x+y=0\ \Rightarrow\begin{cases}x=t\\y=-2t\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ E(5)=\langle(1,-2)\rangle$$

Infine:

$$a_1: \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + t \end{cases} \quad \Rightarrow \; x - 2y = 0$$

$$a_2: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 - 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \; 2x + y = 0$$

(2) Consideriamo l'equazione $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ associata alla forma quadratica}$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Possiamo calcolare il determinante di $A$, oppure determinarne gli autovalori:

$$I_2 = \det(A) = -80 < 0 \qquad \Rightarrow \; \text{si tratta di un'iperbole}$$

Oppure:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

Quindi $A$ ha due autovalori discordi ($\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2$), $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole.

c) Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \;\Rightarrow\; A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 1 & | & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 6 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 6I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -16 & | & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{16} \\ y = -\frac{5}{16} \end{cases} \quad \Rightarrow C = \left(-\frac{1}{16}, -\frac{5}{16}\right)$$

Gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione parallela agli autovettori di $A$. Calcoliamo l'autospazio $E(4)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 4I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; E(4) = \langle (1,1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; E(-2) = \langle (1,-1) \rangle$$

Infine gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione parallela agli autovettori trovati:

$$a_1: \begin{cases} x = -\frac{1}{16} + t \\ y = -\frac{5}{16} + t \end{cases} \quad \Rightarrow \; 4x - 4y - 1 = 0$$

$$a_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{16} + t \\ y = -\frac{5}{16} - t \end{cases} \quad \Rightarrow \; 8x + 8y + 3 = 0$$

(3) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Calcoliamo gli autovalori di $A$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Quindi $A$ ha due autovalori concordi ($\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$), $I_2 = det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.

c) Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ 5II+3I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 16 & -24\sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2},\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

Per determinare gli assi calcoliamo gli autospazi.
Calcoliamo l'autospazio $E(8)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 8I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II-I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -x-y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(8) = \langle(-1,1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-2I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II+I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \langle(1,1)\rangle$$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1: \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} - t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + t \end{cases} \Rightarrow x + y + 4\sqrt{2} = 0$$

$$a_2: \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} + t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + t \end{cases} \Rightarrow x - y + \sqrt{2} = 0$$

(4) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$.

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Determiniamo gli autovalori di $A$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 25-\lambda & 0 \\ 0 & -7-\lambda \end{bmatrix} = (25-\lambda)(-7-\lambda)$$

Quindi $A$ ha due autovalori discordi ($\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = -7$), $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole.

c) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -24 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0,\ \frac{24}{7}\right)$$

Per determinare gli assi cerchiamo gli autovettori di $A$.

Calcoliamo l'autospazio $E(25)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 25I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -32 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -32y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(25) = \langle (1,0) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-7)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 7I$:

$$\begin{bmatrix} 32 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 32x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(-7) = \langle (0,1) \rangle$$

E' chiaro che abbiamo eseguito calcoli sostanzialmente inutili. Infatti la ricerca degli autospazi corrisponde alla rotazione della conica. Il fatto che nell'equazione manchi il termine in $xy$, ovvero $A$ è diagonale, indica che non è necessario effettuare la rotazione e che possiamo prendere come autovettori i vettori della base canonica $(1,0)$ e $(0,1)$.
Infine gli assi sono le rette per il centro parallele agli autovettori (in questo caso parallele agli assi cartesiani):

$$a_1 : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{24}{7}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} + t \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

(5) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$.

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$$

Quindi $A$ ha autovalori: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. Poiché ha un autovalore nullo, $I_2 < 0$ e si tratta di una parabola.

c) Calcoliamo la direzione dell'asse ricordando che questo è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo.
Calcoliamo quindi l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{II - 2I}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(0) = \langle (-2,1) \rangle$$

Ora che abbiamo la direzione dell'asse dobbiamo determinarne un punto per potere scrivere l'equazione.
Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1,2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti $D$ e $E$, allora il punto medio $M$ del segmento $DE$ sarà un punto dell'asse. Senza tenere $k$ variabile assegnamo a $k$ un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$. Se la retta trovata non interseca la parabola la cosa formalmente più corretta sarebbe cambiare valore. In realtà, pensando per un attimo di lavorare in $\mathbf{C}$ anziché in $\mathbf{R}$ possiamo comunque raggiungere il risultato, come vedremo tra poco.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 8x^2 + 16x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado ottenuta ha soluzioni in $\mathbf{C}$, ma non in $\mathbf{R}$:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 25}}{25} = \frac{3 \pm \sqrt{-16}}{25}$$

A noi però interessa in realtà il punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento $DE$ e

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3 + \sqrt{-16}}{25} + \frac{3 - \sqrt{-16}}{25}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{-16} + 3 - \sqrt{-16}}{25} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{25} = \frac{3}{25} \end{aligned}$$

Quindi indipendentemente dal $\Delta$, il valore di $x_M$ viene comunque reale (e corretto).
In alternativa potevamo anche utilizzare le relazioni tra le radici e i coefficienti di una equazione di secondo grado. Infatti data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sappiamo che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Quindi data l'equazione

$$25x^2 - 6x + 1 = 0$$

otteniamo

$$x_1 + x_2 = \frac{6}{25} \qquad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{25}$$

A questo punto possiamo calcolare $y_M$, ricordando che $M$ appartiene al segmento $DE$, cioè alla retta $y = 2x$.

$$\begin{cases} x_M = \frac{3}{25} \\ y_M = 2x_M = \frac{6}{25} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{3}{25}, \frac{6}{25}\right)$$

Infine l'asse è la retta per $M$ parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{25} - 2t \\ y = \frac{6}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x + 10y = 3$$

Il vertice della parabola è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola stessa:

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{3}{5} \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ \left(-2y + \dfrac{3}{5}\right)^2 + 4y\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 4y^2 - 6\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ 12y - \frac{56}{25} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{75} \\ y = \frac{14}{75} \end{cases} \Rightarrow V = \left(\frac{17}{75}, \frac{14}{75}\right)$$

□

**Esercizio 10.9** (13.5)**.** *Riconoscere che le seguenti coniche $f(x, y) = 0$ sono degeneri e determinare le equazioni delle rette che le formano. Se si tratta di una conica a centro determinarne il centro.*

(1) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$

(2) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$

(3) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Soluzione:

(1) Consideriamo l'equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$ e le matrici $A'$ e $A$ associate

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \qquad k = 0$$

Poichè $A'$ ha due righe uguali si ha $I_3 = \det(A') = 0$, quindi si tratta di una conica degenere. Inoltre $I_2 = \det(A) = 0$, quindi si tratta conica degenere non a centro. Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita $x$ e considerare la $y$ come parametro:

$$x^2 + (2y + 3)x + (y^2 + 3y) = 0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2y - 3 \pm \sqrt{(2y+3)^2 - 4(y^2+3y)}}{2} = \frac{-2y - 3 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{-2y - 3 \pm 3}{2} \\ \Rightarrow &\quad x = -y \qquad \text{oppure} \qquad x = -y - 3 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali parallele:

$$\begin{aligned} r_1 &: \; x + y = 0 \\ r_2 &: \; x + y + 3 = 0 \end{aligned}$$

(2) Consideriamo l'equazione $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Notiamo che senza eseguire calcoli possiamo dedurre che $I_3 = \det(A') = 0$ in quanto $A'$ ha due righe uguali, quindi si tratta di una conica degenere.

Per determinare esplicitamente l'equazione della retta risolviamo l'equazione di secondo grado nell'incognita $x$ con parametro $y$ (o viceversa):

$$\begin{aligned} &x^2 - 2(3y - 1) + (9y^2 - 6y + 1) = 0 \;\Rightarrow \\ &x_{1,2} = (3y - 1) \pm \sqrt{(3y-1)^2 - (9y^2 - 6y + 1)} = 3y - 1 \end{aligned}$$

Quindi si tratta della retta $x - 3y + 1 = 0$ (conica doppiamente degenere, infatti $\text{rg}(A') = 1$).

(3) Consideriamo l'equazione $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Poichè $I_3 = \det(A') = 0$ si tratta di una conica degenere. Inoltre $I_2 = \det(A) \neq 0$ quindi si tratta di una conica degenere a centro.

Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita $x$ e considerare la $y$ come parametro (o viceversa):

$$x^2 + xy + (-2y^2 + 3y - 1) = 0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(-2y^2 + 3y - 1)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{9y^2 - 12y + 4}}{2} \\ &= \frac{-y \pm (3y - 2)}{2} \\ \Rightarrow &\quad x = y - 1 \qquad \text{oppure} \qquad x = -2y + 1 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali incidenti:

$$\begin{aligned} r_1 &: \; x - y + 1 = 0 \\ r_2 &: \; x + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Notiamo che le due rette si intersecano nel punto $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ che corrisponde al centro della conica. Il punto $C$ lo possiamo anche ricavare, come nei casi di coniche a centro non degeneri, risolvendo il sistema $A \cdot [x\ y]^T = -h$.

□

**Esercizio 10.10** (13.6)**.** *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

SOLUZIONE:

a) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(A') = 8\sqrt{2}(-40\sqrt{2}) + 38(25 - 9) = -640 + 608 = -32$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (5 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$, concordi, e si tratta di un'ellisse.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 + 2y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-32 = 16t \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$8x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + y^2 - 1 = 0$$

b) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(A') = 25 \cdot (-49 - 24^2) = -25 \cdot 625 \neq 0$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (25 - \lambda)(-7 - \lambda)$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = -7$, disconcordi, e si tratta di un'iperbole.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 - by^2 - 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 25x^2 - 7y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-25 \cdot 625 = -25 \cdot 7t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{625}{7}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$25x^2 - 7y^2 + \frac{625}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{25}x^2 - \frac{49}{625}y^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{7}{25}x^2 + \frac{49}{625}y^2 - 1 = 0$$

Per ottenere la forma canonica in questo caso dobbiamo effettuare la rotazione che manda $x$ in $y$ e $y$ in $-x$::

$$\frac{49}{625}x^2 - \frac{7}{25}y^2 - 1 = 0$$

c) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(A') = -3 \cdot 12 = -36 \neq 0$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$, e si tratta di una parabola.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_2 x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-36 = -5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{36}{5} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{6}{\sqrt{5}}\right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}}y = 0$$

□

**Esercizio 10.11** (13.7)**.** *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche e determinare il cambiamento di coordinate necessario per passare da una forma all'altra:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

SOLUZIONE:

a) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$. Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

Poiché $I_3 = \det(A') \neq 0$ è una conica non degenere.
Determiniamo gli autovalori di $A$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Quindi $A$ ha due autovalori concordi $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$, $I_2 > 0$ e si tratta di un'ellisse la cui forma canonica ha associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione sull'invariante $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo l'equazione:

$$-32 = 16t \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Infine la forma canonica cercata è:

$$8X^2 + 2Y^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4X^2 + Y^2 - 1 = 0$$

Per determinare le trasformazioni per passare da una forma all'altra dobbiamo determinare il centro della conica, che indica la traslazione, e la matrice di rotazione $R$.

Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & | & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 5II + 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 16 & | & -24\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2},\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

Per determinare la matrice di rotazione dobbiamo trovare gli autovettori di $A$. Calcoliamo l'autospazio $E(8)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 8I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & | & 0 \\ -3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(8) = \langle(-1, 1)\rangle = \langle(1, -1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & | & 0 \\ -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \langle(1, 1)\rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine le trasformazioni sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

dove $(x_0, y_0)$ è il centro $C$ della conica. Quindi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) - \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y + \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) + \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che utilizzando il primo cambio di variabile, quello da $(x, y)$ a $(X, Y)$, nell'equazione iniziale si ottiene effettivamente la forma canonica che abbiamo determinato utilizzando gli invarianti.

b) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$.
Le matrici associate alla conica sono

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \quad k = 7$$

$I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi è una conica non degenere.

Determiniamo gli autovalori di $A$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 25-\lambda & 0 \\ 0 & -7-\lambda \end{bmatrix} = (25-\lambda)(-7-\lambda)$$

Quindi $A$ ha due autovalori discordi: $\lambda = 25$ e $\lambda = -7$, $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole la cui forma canonica ha associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione sull'invariante $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = \frac{625}{7}$, per cui la forma canonica cercata è:

$$-7X^2 + 25Y^2 + \frac{625}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{49}{625}X^2 - \frac{7}{25}Y^2 - 1 = 0$$

Per determinare le trasformazioni per passare da una forma all'altra dobbiamo determinare il centro della conica, che indica la traslazione, e la matrice di rotazione $R$.

Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & | & 0 \\ 0 & -7 & | & -24 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0, \frac{24}{7}\right)$$

Calcoliamo l'autospazio $E(-7)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 7I$:

$$\begin{bmatrix} 32 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(-7) = \langle (0,1) \rangle = \langle (0,-1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(25)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 25I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -18 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(25) = \langle (1,0) \rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che in effetti abbiamo solo effettuato la rotazione che scambia $x$ e $y$ in quando la conica di partenza non presentava il termine $xy$, quindi era già ruotata con gli assi paralleli agli assi cartesiani.

Infine le trasformazioni sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{24}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ -X + \frac{24}{7} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - \frac{24}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y + \frac{24}{7} \\ x \end{bmatrix}$$

Notiamo che utilizzando il primo cambio di variabile, quello da $(x, y)$ a $(X, Y)$ nell'equazione iniziale si ottiene effettivamente la forma canonica che abbiamo determinato utilizzando gli invarianti.

c) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$. Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \lambda(\lambda - 5)$$

Quindi $A$ ha due autovalori $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 0$, $I_2 = 0$ e si tratta di una parabola.

Calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II + I \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(5) = \langle (1,2) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(0) = \langle (-2,1) \rangle$$

Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_2 x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sfruttando l'invariante $I_3$ per cui $\det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = -\frac{6}{\sqrt{5}}$ Infine possiamo la forma canonica cercata è:

$$5x^2 + 2 \cdot \left( -\frac{6}{\sqrt{5}} \right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}} y = 0$$

Dagli autovettori ricaviamo inoltre la matrice ortogonale speciale $R$ di cambiamento di base:

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per determinare la traslazione dobbiamo trovare il vertice, dato dal punto di intersezione tra l'asse e la parabola. Sappiamo che l'asse è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo e che $E(0) = (-2, 1)$. Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1, 2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti $D$ e $E$, allora il punto medio $M$ del segmento $DE$ sarà un punto dell'asse. Senza tenere $k$ variabile assegnamo a $k$ un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$. Se la retta trovata non interseca la parabola la cosa formalmente più corretta sarebbe cambiare valore. In realtà, pensando per un attimo di lavorare in $\mathbf{C}$ anziché in $\mathbf{R}$ possiamo comunque raggiungere il risultato, come vedremo tra poco.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 8x^2 + 16x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

Dalle relazione tra i coefficienti e le soluzioni di una equazione di secondo grado otteniamo

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{25} = \frac{3}{25}$$

A questo punto possiamo calcolare $y_M$, ricordando che $M$ appartiene al segmento $DE$, cioè alla retta $y = 2x$.

$$\begin{cases} x_M = \frac{3}{25} \\ y_M = 2x_M = \frac{6}{25} \end{cases} \Rightarrow M = \left( \frac{3}{25}, \frac{6}{25} \right)$$

Infine l'asse è la retta per $M$ parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{25} - 2t \\ y = \frac{6}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x + 10y = 3$$

Il vertice della parabola è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola stessa:

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{3}{5} \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ \left(-2y + \dfrac{3}{5}\right)^2 + 4y\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 4y^2 - 6\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ 12y - \frac{56}{25} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{75} \\ y = \frac{14}{75} \end{cases} \Rightarrow V = \left(\frac{17}{75}, \frac{14}{75}\right)$$

Infine le trasformazioni cercate sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{17}{75} \\ \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) + \frac{17}{75} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) + \frac{14}{75} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{17}{75} \\ y - \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x + 2y - \frac{3}{5}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2x + y + \frac{4}{15}\right) \end{bmatrix}$$

In realtà con la parabola ci può essere un problema: effettuando il cambio di variabile indicato non otteniamo l'equazione canonica determinata. Questo è dovuto al fatto che in realtà la rotazione corretta è:

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

data dalla composizione della rotazione $R$ precedentemente trovata con la rotazione

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che manda $X$ in $-X$ e $Y$ in $-Y$. Infatti la scelta della matrice di rotazione (ortogonale speciale) è sempre a meno del segno.

La trasformazione corretta che permette di passare dall'equazione iniziale alla forma canonica è:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{17}{75} \\ \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) + \frac{17}{75} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X - Y) + \frac{14}{75} \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 10.12** (13.8)**.** *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C} \;:\; 2xy - x - 3y = k$$

(1) *Stabilire per quali valori di $k$ la conica $\mathcal{C}$ è degenere.*
(2) *Posto $k = 0$, stabilire di quale tipo di conica si tratti.*
(3) *Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{C}$.*

Soluzione:

La matrice $A'$ associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -k \end{bmatrix}$$

(1) Per stabilire se la conica è degenere calcoliamo il determinante di $A'$:

$$I_3 = \det(A') = -\left(-k - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = k + \frac{3}{2}$$

Quindi $\mathcal{C}$ è degenere se $k = -\dfrac{3}{2}$.

(2) Posto $k=0$ calcoliamo il determinante della sottomatrice $A$

$$I_2 = \det(A) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

Si tratta quindi di un'iperbole.

(3) Per determinare il centro di $\mathcal{C}$ risolviamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \ C = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Per determinare gli assi dobbiamo inoltre individuare la rotazione da effettuare per passare alla forma canonica. Calcoliamo quindi gli autospazi di $A$.

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

Quindi $A$ ha due autovalori distinti: $\lambda = \pm 1$. Inoltre

$$E(1) = \langle\ (1,1)\ \rangle$$
$$E(-1) = \langle\ (-1,1)\ \rangle$$

I due autovettori indicano le direzioni degli assi della conica, quindi gli assi sono le due rette passanti per il centro $C$ della conica e parallele a tali vettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = \frac{3}{2} - t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Ricavando le equazioni in forma cartesiana otteniamo:

$$a_1 : \ x - y = 1$$
$$a_2 : \ x + y = 2$$

□

**Esercizio 10.13** (13.9). *Sia $k$ un parametro reale. Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_k$ di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \ 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

a) *Esistono coniche degeneri nella famiglia?*
b) *Si classifichi la conica $\mathcal{C}_k$ al variare di $k$.*
c) *Si determinino le coordinate dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ (quando esistono).*

Soluzione:

Consideriamo le matrici associate a $\mathcal{C}$:

$$A' = \begin{bmatrix} 2k & k-2 & 1 \\ k-2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2k & k-2 \\ k-2 & -4 \end{bmatrix}$$

a) $I_3 = \det(A') = k^2 + 4k + 8 \neq 0$ per ogni valore di $k$, quindi non esistono coniche degeneri nella famiglia.
b) $I_2 = \det(A) = -(k+2)^2$, quindi
   – Se $k = -2$, $I_2 = \det(A) = 0$ e $\mathcal{C}_{-2}$ è una parabola.
   – Se $k \neq -2$, $I_2 = \det(A) < 0$ e $\mathcal{C}_k$ è una iperbole.
c) Calcoliamo il centro $C_k$ delle coniche $\mathcal{C}_k$ nel caso $k \neq -2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2k & k-2 & -1 \\ k-2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Scambiando prima e seconda riga e prima e seconda colonna otteniamo:

$$\begin{bmatrix} -4 & k-2 & | & 0 \\ k-2 & 2k & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow_{4II+(k-2)I} \begin{bmatrix} -4 & k-2 & | & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & | & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4y+(k-2)x=0 \\ (k+2)^2x=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{(k+2)^2} \\ y=-\dfrac{k-2}{(k+2)^2} \end{cases}$$

□

**Esercizio 10.14** (13.11)**.** *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \quad x^2+kxy+y^2-4=0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali.*

Soluzione:

Consideriamo le matrici $A'$ e $A$ associate alla conica:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Cominciamo a distinguere il caso degenere:

$$I_3 = \det(A') = -4\left(1-\left(\frac{k}{2}\right)^2\right)$$

quindi $\det(A')=0$ se $\left(\dfrac{k}{2}\right)^2=1$, cioè

$$\frac{k}{2}=1 \ \Rightarrow \ k=2$$
$$\frac{k}{2}=-1 \ \Rightarrow \ k=-2$$

Infine la conica è non degenere se $k \neq \pm 2$. Inoltre:

$$I_2=\det(A)=1-\left(\frac{k}{2}\right)^2=\frac{-k^2+4}{4}$$

Quindi
- Se $-2<k<2$, si ha $I_2=\det(A)>0$ e $\mathcal{C}$ è un'ellisse.
- Se $k<-2$ o $k>2$, si ha $I_2=\det(A)<0$ e $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
- Se $k=\pm 2$ si tratta di una parabola degenere.

b) Abbiamo già visto che la conica è degenere se $k=\pm 2$, inoltre:
- Se $k=-2$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2-2xy+y^2-4=0$. Anche senza utilizzare la formula per risolvere l'equazione otteniamo:

$$(x-y)^2=4 \ \Rightarrow \ x-y=\pm 2$$

Quindi in questo caso la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1: \ x-y=2, \qquad r_2: \ x-y=-2$$

- Se $k=2$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2+2xy+y^2-4=0$ e in maniera del tutto analoga otteniamo:

$$(x+y)^2=4 \ \Rightarrow \ x+y=\pm 2$$

e la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1: \ x+y=2, \qquad r_2: \ x+y=-2$$

c) Abbiamo visto che $\mathcal{C}$ è un'ellisse se $-2<k<2$. Inoltre se per esempio $x=0$ dall'equazione di $\mathcal{C}$ otteniamo $y=\pm 2$, quindi i punti $A(0,2)$ e $B(0,-2)$ appartengono ad ogni conica. Se una conica (non degenere) contiene un punto reale è necessariamente tutta reale. Quindi in particolare tutte le ellissi sono reali.

□

**Esercizio 10.15** (13.13)**.** *Fissato il parametro reale $t$, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t \ : \ tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di $t$ per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro $t$.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = -1$.*

SOLUZIONE:

La matrice $A'$ associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t+2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\det(A') = -t$, quindi la conica è degenere per $t = 0$
b) $\det(A) = t^2 + 2t - 1$, quindi:
   – Se $t < -1 - \sqrt{2}$ o $t > -1 + \sqrt{2}$, $\det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.
   – Se $-1 - \sqrt{2} < t < -1 + \sqrt{2}$ con $t \neq 0$, $\det(A) < 0$ e si tratta di un'iperbole.
   – Se $t = -1 \pm \sqrt{2}$, $\det(A) = 0$ e si tratta di una parabola.
   – Se $t = 0$ otteniamo l'equazione $2xy + 2y^2 - 2y = 0$, quindi si tratta di una coppia di rette incidenti (infatti $\det(A) \neq 0$): $y = 0$ e $x + y - 1 = 0$.
c) Calcoliamo gli autovalori di $A$ per $t = -1$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2$$

Quindi gli autovalori di $A$ sono $\lambda = \pm\sqrt{2}$, discordi infatti si tratta di un'iperbole. La conica ha quindi equazione del tipo

$$\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + k = 0 \ \Rightarrow \ B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $I_3 = \det(B) = \det(A) = 1$ otteniamo $-2k = 1$, quindi l'equazione di $\mathcal{C}_{-1}$ è

$$\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 - \frac{1}{2} = 0 \ \Rightarrow \ \mathcal{C}_{-1} : \quad 2\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}y^2 - 1 = 0$$

□

**Esercizio 10.16** (13.14)**.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare autovalori e autovettori di $A$.*
b) *Calcolare una matrice diagonalizzante di $A$, che sia ortogonale e rappresenti una rotazione dello spazio attorno all'origine.*
c) *Scrivere la forma canonica della conica $\mathcal{C}$ con matrice associata $A$*

SOLUZIONE:

a) Il polinomio caratteristico di $A$ è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di $A$ sono $\lambda = -1, 1, 3$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

$$E(-1) = N(M + I) : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(-1) = \langle (0, -1, 1) \rangle$$

b) Gli autovettori trovati, essendo relativi a autovalori distinti, sono già ortogonali tra loro. E' quindi sufficiente renderli di norma 1 per ottenere la matrice diagonalizzante ortogonale di rotazione:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c) $\det(A) = -3$, quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre l'autovalore della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ associata alla forma quadratica è $\lambda = 1$ doppio. Si tratta quindi di un'ellisse e cerchiamo un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + t = 0$ a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $\det(A) = \det(B)$ otteniamo $t = -3$. Infine la forma canonica della conica (ellisse reale) è

$$x^2 + y^2 - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 1 = 0$$

Notiamo che si tratta in realtà di una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{3}$.

$\square$