CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 9 – GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 9.1 (10.7)**.** *Siano assegnati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v = (2, -1, 0, 1), \qquad w = (-1, 2, 0, 2)$$

a) *Si calcoli l'angolo tra i due vettori.*
b) *Si determini la proiezione ortogonale di v su w.*
c) *Si scriva v come somma di un vettore v_1 multiplo di w e di un vettore v_2 ortogonale a w.*

Soluzione:

a) Se indichiamo con ϑ l'angolo (convesso) tra i due vettori, sappiamo che

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v, w)}{\| v \| \cdot \| w \|}$$

Poiché

$$(v, w) = -2 - 2 + 2 = -2, \quad \| v \| = \sqrt{6}, \quad \| w \| = \sqrt{9} = 3,$$

otteniamo

$$\cos(\vartheta) = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot 3} = -\frac{2}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{9}$$

e

$$\vartheta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{9}\right), \quad \text{con } 0 \leq \vartheta < \pi$$

b) La proiezione ortogonale di v su w è il vettore

$$pr_w(v) = \frac{(v, w)}{\| w \|^2} \cdot w = \frac{(v, w)}{(w, w)} \cdot w$$

Notiamo che $pr_w(v)$ è un vettore multiplo di w.
Sappiamo già che $(v, w) = -2$, inoltre $(w, w) = \| w \|^2 = 3^2 = 9$, quindi

$$pr_w(v) = \frac{-2}{9} \cdot w = \left(\frac{2}{9},\ -\frac{4}{9},\ 0,\ -\frac{4}{9}\right)$$

c) Dalla teoria sappiamo che il vettore $v - pr_w(v)$ è un vettore ortogonale a w (è comunque immediato verificarlo), quindi possiamo prendere:

$$\begin{aligned} &v_1 = pr_w(v) \quad \text{multiplo di } w \\ &v_2 = v - pr_w(v) \quad \text{ortogonale a } w \\ &v_1 + v_2 = v \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{2}{9},\ -\frac{4}{9},\ 0,\ -\frac{4}{9}\right) \\ v_2 &= \left(\frac{16}{9},\ -\frac{5}{9},\ 0,\ \frac{13}{9}\right) \end{aligned}$$

□

Esercizio 9.2 (10.8)**.** *Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v = (3, 4, -2), \qquad w = (2, 1, -1)$$

Soluzione:

- La proiezione ortogonale di v su w è il vettore
$$pr_w(v) = \frac{(v,w)}{\| w \|^2} \cdot w = \frac{(v,w)}{(w,w)} \cdot w$$
Notiamo che $pr_w(v)$ è un vettore multiplo di w.
$$(v,w) = 12$$
$$(w,w) = 6$$
quindi
$$pr_w(v) = \frac{12}{6} \cdot w = (4,\ 2,\ -2)$$
- Dalla teoria sappiamo che il vettore $v - pr_w(v)$ è un vettore ortogonale a w , quindi possiamo prendere:
$$\begin{aligned} &v_1 = pr_w(v) \quad \text{multiplo di } w \\ &v_2 = v - pr_w(v) \quad \text{ortogonale a } w \\ &v_1 + v_2 = v \end{aligned}$$
Quindi
$$\begin{aligned} &v_1 = (4,\ 2,\ -2) \\ &v_2 = (-1,\ 2,\ 0) \end{aligned}$$

□

Esercizio 9.3 (10.11)**.** *Data la base*
$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1,0,1),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (1,0,1)\}$$
di $\mathbf{R}^3$*, si determini una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da* $\mathcal{B}$*.*

Soluzione:

Sia $\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$.

Costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).
$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (-1,0,1) \\ w_2 &= v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2,w_1)}{(w_1,w_1)} \cdot w_1 = (0,1,0) - 0 \cdot w_1 = (0,1,0) \\ w_3 &= v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3,w_1)}{(w_1,w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3,w_2)}{(w_2,w_2)} \cdot w_2 \\ &= (1,0,1) - 0 \cdot w_1 - 0 \cdot w_2 = (1,0,1) \end{aligned}$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:
$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ u_2 &= w_2 = (0,1,0) \\ u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$
Notiamo che potevamo osservare dall'inizio che v_1, v_2 e v_3 sono già ortogonali, quindi era sufficiente normalizzarli per ottenere a partire da essi una base ortonormale.

□

Esercizio 9.4 (10.12)**.** *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*
$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,0,1)\}$$

Soluzione:
Sia $\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$. Per facilitare i conti scambiamo innanzitutto l'ordine di v_1, v_2 e v_3 in $\mathcal{B}$ (cambiando i nomi per evitare confusioni):

$$\mathcal{B} = \{v_1' = (0,0,1),\ v_2' = (0,1,1),\ v_3' = (1,1,1)\}$$

Come nell'esercizio precedente costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1' = (0,0,1)\\
w_2 &= v_2' - pr_{w_1}(v_2') = v_2' - \frac{(v_2', w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (0,1,1) - \frac{1}{1} \cdot (0,0,1) = (0,1,0)\\
w_3 &= v_3' - pr_{w_1}(v_3') - pr_{w_2}(v_3') = v_3' - \frac{(v_3', w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3', w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2\\
&= (1,1,1) - \frac{1}{1} \cdot (0,0,1) - \frac{1}{1} \cdot (0,1,0) = (1,0,0)
\end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso i vettori ottenuti hanno già norma 1, quindi

$$u_1 = w_1 = (0,0,1), \qquad u_2 = w_2 = (0,1,0), \qquad u_3 = w_3 = (1,0,0)$$

Infine

$$\mathcal{B}' = \{(0,0,1),\ (0,1,0),\ (1,0,0)\ \}$$

□

Esercizio 9.5 (10.14)**.** *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ (con il prodotto scalare canonico) generato dai vettori*

$$v_1 = (1,1,0,1),\ v_2 = (1,-2,0,0),\ v_3 = (1,0,-1,2).$$

a) *Trovare una base ortonormale di W.*
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di W.*

Soluzione:

a) Notiamo che l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di W in quanto i vettori sono linearmente indipendenti (la matrice associata ha rango 3). Per determinare una base ortonormale $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ dobbiamo utilizzare il metodo di Gram-Schmidt, costruendo prima una base $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ di vettori a due a due artogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 = (1,1,0,1)\\
w_2 &= v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (1,-2,0,0) - \frac{-1}{3} \cdot (1,1,0,1) =\\
&= \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Prima di procedere notiamo che dei vettori w_i ci interessa solo la direzione (in modo che siamo tra loro ortogonali), ma non la lunghezza. Quindi ci conviene sostituire il vettore trovato con un suo multiplo:

$$\begin{aligned}
w_2 &= 3 \cdot \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) = (4,-5,0,1)\\
w_3 &= v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2\\
&= (1,0,-1,2) - \frac{3}{3} \cdot (1,1,0,1) - \frac{6}{42} \cdot (4,-5,0,1) = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, -1, \frac{6}{7}\right)
\end{aligned}$$

Anche in questo caso ci conviene sostituire il vettore trovato con un suo multiplo:

$$w_3 = -7 \cdot \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, -1, \frac{6}{7}\right) = (4,2,7,-6)$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, 0, \frac{1}{\sqrt{42}}\right) \\ u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{105}}, \frac{2}{\sqrt{105}}, \frac{7}{\sqrt{105}}, -\frac{6}{\sqrt{105}}\right) \end{aligned}$$

Infine una base ortonormale di W è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, 0, \frac{1}{\sqrt{42}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{105}}, \frac{2}{\sqrt{105}}, \frac{7}{\sqrt{105}}, -\frac{6}{\sqrt{105}}\right) \right\}$$

b) Il complemento ortogonale $W^\perp$ è formato dai vettori di $\mathbf{R}^4$ ortogonali ai vettori di W, ovvero ortogonali agli elementi di una sua base, quindi

$$W^\perp = \{(x, y, z, w) \mid x + y + w = 0,\ x - 2y = 0,\ x - z + 2w = 0\}$$

Risolviamo quindi il sistema omogeneo ottenuto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}t \\ y = -\frac{1}{3}t \\ z = \frac{4}{3}t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Infine

$$\mathcal{B}(W^\perp) = \{\ (-2, -1, 4, 3)\ \}$$

$\square$

Esercizio 9.6 (10.15)**.** *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1).$$

a) *Calcolare le lunghezze di* v_1 *e di* v_2*.*
b) *Determinare la proiezione ortogonale di* v_1 *su* v_2*.*
c) *Trovare una base ortonormale del sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato dai vettori* v_1 *e* v_2*.*

SOLUZIONE:

a)

$$\begin{aligned} \| v_1 \| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \\ \| v_2 \| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

b)

$$pr_{v_2}(v_1) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, v_2)} \cdot v_2 = \frac{4}{3} \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

c) Sia $\{u_1, u_2\}$ la base ortonormale cercata. La cosa più semplice per sfruttare i conti già fatti è considerare

$$u_1 = \frac{v_2}{\| v_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Quindi

$$w_2 = v_1 - (v_1, u_1) \cdot u_1 = v_1 - pr_{v_2}(v_1) = (1, 2, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Notiamo che w_2 è parallelo a $(-1, 2, -1)$, quindi

$$u_2 = \frac{(-1, 2, -1)}{\| (-1, 2, -1) \|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Infine la base ortogonale cercata è

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

□

Esercizio 9.7 (10.16)**.** *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $2x_1 + x_2 = 0$. Si determini una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare ordinario di $\mathbf{R}^3$.*

SOLUZIONE:

Gli elementi di U sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che $2x_1 + x_2 = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = s \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$U = \langle\ (1, -2, 0),\ (0, 0, 1)\ \rangle$$

Poichè i due generatori sono tra loro ortogonali, per ottenere una base ortonormale di U è sufficiente prenderli di norma 1:

$$\mathcal{B} = \left\{\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right),\ (0,\ 0,\ 1)\ \right\}$$

□

Esercizio 9.8 (10.21)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la funzione lineare tale che*

$$T(1, -2, 1) = (2, 1),\ T(1, 0, 0) = (-1, 2),\ T(0, 1, 0) = (-1, 0).$$

a) *Che dimensione ha l'immagine di T?*
b) *Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$) del nucleo di T.*

SOLUZIONE:

Per risolvere l'esercizio possiamo procedere in due modi:

(1) Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ associata a T rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1, -2, 1),\ (1, 0, 0),\ (0, 1, 0)\ \}$$

di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$, tenendo poi conto che i vettori ottenuti nello spazio di partenza $\mathbf{R}^3$ (in particolare il Nucleo) saranno espressi rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(2) Ricavare l'azione di T sugli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$ e determinare quindi la matrice $B = M(T)$ associata a T rispetto alle basi canoniche.

Consideriamo entrambi i metodi.

(1) Con il primo metodo consideriamo la matrice A associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La dimensione dell'immagine di T corrisponde al rango di A. Poichè A contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

di determinante $2 \neq 0$, la matrice A ha rango 2, quindi

$$\dim(Im(T)) = 2$$

b) Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 2(-2t) - t = -5t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $N(T))$ è generato dal vettore $(-2, 1, -5)_{\mathcal{B}}$, espresso però rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica tale vettore corrisponde al vettore

$$-2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - 5 \cdot v_3 = (-1, -1, -2)$$

Infine

$$N(T) = \langle\ (-1, -1, -2)\ \rangle$$

Poichè il nucleo ha dimensione uno per determinarne una base ortonormale è sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

(2) Con il secondo metodo ricaviamo invece la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^2$, calcolando le immagini di $e_1,\ e_2,\ e_3$. Poichè conosciamo già $T(e_1) = (-1, 2)$ e $T(e_2) = (-1, 0)$, dobbiamo solo ricavare $T(e_3)$. Sfruttando la linearità di T otteniamo:

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= T(1,-2,1) - T(1,0,0) + 2T(0,1,0) \\ &= (2,1) - (-1,2) + 2(-1,0) = (1,-1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice B associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ II + 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) La dimensione dell'immagine di T corrisponde al rango di B, quindi

$$\dim(Im(T)) = 2$$

b) Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a B

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$N(T) = \langle\ (1, 1, 2)\ \rangle$$

Notiamo che in questo caso il generatore è già espresso rispetto alla base canonica, è quindi sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

□

Esercizio 9.9 (11.3)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Stabilire se l'endomorfismo T é diagonalizzabile.*
b) *Trovare basi ortonormali degli autospazi di T (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$).*
c) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.*

Soluzione:

a) L'endomorfismo T é sicuramente diagonalizzabile perchè è simmetrico.

b) Calcoliamo gli autovalori di T:

$$p_A(\lambda) = (4-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 1] = (4-\lambda)^2(6-\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 \quad \text{doppio} \\ \lambda_2 &= 6 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora gli autospazi.
Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 4I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{III+II} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow y - z = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle\ (1,0,0),\ (0,1,1)\ \rangle$$

Notiamo che, anche senza avere osservato che T è simmetrico, a questo punto possiamo concludere che T è diagonalizzabile in quanto la molteplicità geometrica del suo unico autovalore doppio è 2.

Inoltre i due vettori presi come generatori sono tra loro ortogonali, è perciò sufficiente normalizzarli per ottenere una base ortonormale di $E(4)$:

$$\mathcal{B}(E(4)) = \left\{\ (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a $A - 6I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{III-II} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(6) = \langle\ (0,-1,1)\ \rangle$$

Una base ortonormale di $E(6)$ è:

$$\mathcal{B}(E(6)) = \left\{\ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$

c) L'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{\ (1,0,0)\,,\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$

è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.

□

Esercizio 9.10 (11.5)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (6-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda) - 2\cdot 2(5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 54 - 4) \\ &= -(\lambda-5)^2(\lambda-10) \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\lambda = 10, \qquad \lambda = 5 \quad (\text{doppio})$$

Calcoliamo i due autospazi.

$E(10)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 10I$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ \\ III - 1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -58 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(10) = \langle\ (1, 0, -2)\ \rangle$$

$E(5)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 5I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(5) = \langle\ (2, 0, 1),\ (0, 1, 0)\ \rangle$$

Una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T è data dall'insieme

$$\{\ (1, 0, -2),\ (2, 0, 1),\ (0, 1, 0)\ \}.$$

Notiamo che tali vettori sono già tra loro ortogonali, è quindi sufficiente normalizzarli. Una base ortonormale è quindi data dall'insieme

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right),\ (0, 1, 0) \right\}.$$

□

Esercizio 9.11 (11.9)**.** *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$

$$T(x, y, z) = (ax,\ bx + y + z,\ y + z)$$

con a e b parametri reali.

a) *Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in* $\mathbf{R}$.
b) *Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice $A = M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = (a - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda = a, 0, 2$.

a) Se $a \neq 0, 2$, T ha tre autovalori singoli, quindi è sicuramente diagonalizzabile.
Se $a = 0$, l'autovalore $\lambda = 0$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(0)$:

$$E(0) = \mathrm{N}(A): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - III \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere due casi
– Se $a = 0$ e $b = 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
– Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Analogamente se $a = 2$, l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo quindi distinguere due casi
– Se $a = 2$ e $b = 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
– Se $a = 2$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Infine T è daigonalizzabile se $a \neq 0, 2$ per ogni valore di b, oppure se $a = 0$ o $a = 2$ e $b = 0$.

b) Per $a = b = 0$ abbiamo già in sostanza calcolato l'autospazio

$$E(0) = \langle (0, 1, -1),\ (1, 0, 0) \rangle$$

Notiamo che i due generatori trovati sono già tra loro ortogonali, quindi si tratterà solamente di renderli di norma 1.

Analogamente per $a = b = 0$ otteniamo:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow\ E(2) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Infine la base ortonormale cercata è

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (1, 0, 0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

$\square$