CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 8 – GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 8.1. *Utilizzando le coordinate omogenee, determinare l'equazione della retta r passante per i punti $A(2,3)$ e $B(-1,0)$ e della retta s passante per A e di direzione $\overrightarrow{v}(1,2)$. Determinare inoltre il punto improprio di r e s.*

Soluzione:
Consideriamo la retta r. I punti A e B hanno coordinate omogenee $A(2,3,1)$ e $B(-1,0,1)$, quindi r ha equazione

$$r: \quad \det \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3X - 3Y + 3Z = 0 \quad \Rightarrow \quad r: \ X - Y + Z = 0$$

Un'equazione cartesiana di r è quindi $x - y + 1 = 0$. Per trovare il punto imprório di r la cosa più semplice è porre $Z = 0$ nell'equazione omogenea ottenendo $X = Y$. Di conseguenza il punto improprio è $P_\infty(1,1,0)$. Notiamo che il punto improprio corrisponde alla direzione $\overrightarrow{v}(1,1)$ della retta.

Consideriamo la retta s. La direzione $\overrightarrow{v}$ corrisponde al punto imprорpio $P_\infty(1,2,0)$. Utilizzando la stessa formula precedente otteniamo

$$s: \quad \det \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad s: \ -2X + Y + Z = 0$$

Un'equazione cartesiana di s è quindi $-2x + y + 1 = 0$. In questo caso abbiamo già determinato il punto imprорpio $P_\infty(1,2,0)$. In ogni caso per determinarlo, come nel caso precedente era sufficiente porre $Z = 0$ nell'equazione omogenea ottenendo $Y = 2X$. Di conseguenza il punto improprio è $P_\infty(1,2,0)$.

□

Esercizio 8.2. *Utilizzando le coordinate omogenee, determinare l'equazione del piano π_1 passante per i punti $A(2,3,0)$, $B(3,1,-1)$ e $C(0,0,1)$ e del piano π_2 passante per A e B e parallelo alla retta $x + y = x - z = 0$.*

Soluzione:
I punti A, B e C hanno coordinate omogenee $A(2,3,0,1)$, $B(3,1,-1,1)$ e $C(0,0,1,1)$, quindi π ha equazione

$$\pi_1: \quad \det \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1: \ -5X + Y - 7Z + 7W = 0$$

Un'equazione cartesiana di π_1 è quindi $5x - y + 7z - 7 = 0$.

La retta $x + y = x - z = 0$ ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \qquad \forall t \in \mathbf{R} \\ z = t \end{cases}$$

quindi ha direzione $\overrightarrow{v}(1,-1,1)$ a cui corrisponde il punto improprio $P_\infty(1,-1,1,0)$. Utilizzando la formula precedente si ottiene:

$$\pi_2: \quad \det \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_2: \ -3X - 2Y + Z + 12W = 0$$

Un'equazione cartesiana di π_2 è quindi $3x + 2y - z = 12$.

Notiamo che per semplificare i conti nel calcolo del determinante è possibile effettuare alcune operazioni di riduzione sulla matrice in modo da ottenere alcuni termini nulli. Le operazioni di riduzione non alterano infatti il rango della matrice, quindi se A' è la matrice ridotta, si ha $\det(A) = 0$ se e solo se $\det(A') = 0$. Ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV + III \end{array} \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

Ora, imponendo $\det(A') = 0$ si ottiene la medesima equazione $\pi_2 : \; -3X - 2Y + Z + 12W = 0$.

□

Esercizio 8.3. *Stabilire se il piano di coordinate omogenee $N = (1, -2, 0, -3)$ passa per il punto $P(1, -1, 2)$.*

Soluzione:

Il piano di coordinate omogenee $N = (1, -2, 0, -3)$ è il piano $X - 2Y - 3W = 0$, cioè $x - 2y - 3 = 0$. Il punto P appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione. Poichè $1 - 2(-1) - 3 = 0$ il punto appartiene al piano.

In alternativa si potevano calcolare le coordinate omogenee di $P(1, -1, 2, 1)$ e P appartiene al piano se $N \cdot P = 0$. Infatti $N \cdot P = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 = 0$.

□

Esercizio 8.4. *Determinare un'equazione parametrica della retta r passante per i punti $A(1, 2, -5)$ e $B(-1, 0, 3)$, e trovarne il punto all'infinito.*

Soluzione:

La retta r ha direzione $AB = (-2, -2, 8)$ cioè $\overrightarrow{v} = (1, 1, -4)$. Un'equazione parametrica di r è

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Il punto improprio di r corrisponde alla sua direzione ed è $P_\infty(1, 1, -4, 0)$.

In alternativa si potevano utilizzare la coordinate omogenee $A(1, 2, -5, 1)$ e $B(-1, 0, 3, 1)$ dei suoi due punti. r è data dall'insieme dei punti $\alpha A + \beta B$ al variare di α e β in $\mathbf{R}$:

$$r : (\alpha - \beta, \; 2\alpha, \; -5\alpha + 3\beta, \; \alpha + \beta)$$

Il suo punto improrio si ottiene quando $\alpha + \beta = 0$ ed è $(2\alpha, 2\alpha, -8\alpha, 0) = (2, 2, -8, 0) = (1, 1, -4, 0) = P_\infty$. Per ottenere un'equazione parametrica cartesiana basta dividere per $\alpha + \beta$:

$$r : \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \; \frac{2\alpha}{\alpha + \beta}, \; \frac{-5\alpha + 3\beta}{\alpha + \beta} \right) \Rightarrow \; r : \begin{cases} x = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \\ y = \dfrac{2\alpha}{\alpha + \beta} \\ z = \dfrac{-5\alpha + 3\beta}{\alpha + \beta} \end{cases} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

Notiamo che benchè l'equazione ottenuta appaia notevolmente differente è abbastanza facile ricondurci da questa equazione a quella precedente ponendo $\dfrac{\alpha}{\alpha + \beta} = t$.

□

Una **proiezione centrale** T da un punto C su un piano π di coordinate omogeneee N, o una **proiezione parallela** T da un punto improprio C (corrispondente alla direzione della proiezione) su un piano π di coordinate omogeneee N ha matrice

$$M = N^t C - (N \cdot C) \, I_4$$

Inoltre la proiezione T trasforma il generico punto P nel punto $P' = T(P)$, appartenente a π, nel seguente modo:

$$P' = T(P) = P \cdot M$$

Il piano π è detto piano di vista.

Una proiezione parallela è detta ortogonale se ha direzione ortogonale al piano di vista, mentre è detta obliqua in caso contrario.

Esercizio 8.5. *Si consideri la proiezione centrale T sul piano $x+y=1$ dal centro $C(1,2,-1)$. Dopo avere determinato la matrice di T, stabilire in cosa vengono trasformati i punti $A(1,5,0)$ e $B(1,0,0)$.*

Soluzione:

Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1,1,0,-1)$ e C ha coordinate omogenee $C(1,2,-1,1)$, quindi

$$N^tC = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad N \cdot C = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 + (-1) \cdot 1 = 2$$

Quindi

$$M = N^tC - 2I_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Passando alle coordinate omogenee, il punto $A(1,5,0,1)$ viene trasformato nel punto

$$A' = T(A) = A \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = (3,0,-5,3) = \left(1, 0, -\frac{5}{3}, 1\right)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, A è trasformato nel punto $A'\left(1,0,-\frac{5}{3}\right)$.

Analogamente il punto B di coordinate omogenee $B(1,0,0,1)$ viene trasformato nel punto

$$B' = T(B) = B \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B' = (-2,0,0,-2) = (1,0,0,1)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, B è trasformato nel punto $B'(1,0,0) = B$. Potevamo osservare dall'inizio che, poiché B appartiene al piano di vista, viene trasformato in se stesso dalla proiezione.

□

Esercizio 8.6. *Determinare la matrice della proiezione parallela T sul piano $x-y+2z=0$ di direzione $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$. Dopo avere determinato la matrice di T, stabilire in cosa viene trasformata la retta $r:\ x+y=z=0$.*

Soluzione:

Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1,-1,2,0)$ e la direzione $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$ corrisponde al punto improrio $C = C_\infty(1,0,-1,0)$, quindi

$$N^tC = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad N \cdot C = -1$$

Quindi

$$M = N^tC + I_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La retta r viene proiettata in una retta r'. Per trovare un'equazione di r' la cosa più semplice è forse trovarne due suoi punti. Prendiamo quindi due qualsiasi punti A e B di r e deteminiamo i punti A' e B' in cui questi vengono proiettati. La retta r' è la retta passante per A' e B'.

Prendiamo ad esempio i punti $A(0,0,0)$ e $B(1,-1,0)$ appartenenti a r. Passando alle coordinate omogenee, il punto $A(0,0,0,1)$ viene proiettato nel punto

$$A' = T(A) = A \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A' = (0,0,0,1)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, A è proiettatoo nel punto $A'\,(0,0,0)$. Notiamo che, osservando che A è un punto del piano di vista, potevamo scrivere direttamente $A' = A$.

Analogamente il punto B di coordinate omogenee $B(1,-1,0,1)$ viene proiettato nel punto

$$B' = T(B) = B \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B' = (3,-1,-2,1)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, B è trasformato nel punto $B'(3,-1,-2)$.

Infine la retta r' in cui è trasformata r è la retta passante per $A'(0,0,0)$ e $B'(3,-1,-2)$:

$$r': \begin{cases} x = 3t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 8.7. *Sia π il piano di equazione $x + 2y - z = 0$ e C il punto di coordinate* $(0,1,-1)$.

a) *Si determini la matrice della proiezione dal centro C sul piano di vista π.*

b) *Si trovino equazioni delle proiezioni delle rette*

$$r: \quad x + y = x + z - 1 = 0 \qquad\qquad s: \quad x = y = z + 1$$

Soluzione:

a) Il centro C e il piano π hanno rispettivamente coordinate omogenee $C(0,1,-1,1)$ e $N(1,2,-1,0)$, quindi la matrice della proiezione è

$$M = N^tC - (N \cdot C)I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 3I_4 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Consideriamo la retta r e siano $A(1,-1,0)$ e $B(0,0,1)$ due suoi punti. Passando alle coordinate omogenee $A(1,-1,0,1)$ e $B(0,0,1,1)$ vengono proiettati nei punti

$$A' = A \cdot M = (-3,2,1,-4) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad A' = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$B' = B \cdot M = (0,-1,-2,-4) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad B' = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Quindi la retta r è proiettata nella retta r' passante per A' e B':

$$r': \begin{cases} x = -t \\ y = \frac{1}{4} + t \\ z = \frac{1}{2} + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Analogamente consideriami i punti $P(1,1,0)$ e $Q(2,2,1)$ di s. Passando alle coordinate omogenee $P(1,1,0,1)$ e $Q(2,2,1,1)$ vengono proiettati nei punti

$$P' = P \cdot M = (-3,0,-3,0)$$

Notiamo che P' è un punto improrio e corrisponde alla direzione $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$. Inoltre

$$Q' = Q \cdot M = (-6,-1,-8,2) = \left(-3, -\frac{1}{2}, -4, 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad Q' = \left(-3, -\frac{1}{2}, -4\right)$$

Quindi la retta s è proiettata nella retta s' passante per Q' e di direzione $(1,0,1)$:

$$s': \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -4 + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 8.8. *Sia π il piano di equazione $3x - y + z = 1$ e $\overrightarrow{v}$ il vettore* $(1,1,1)$.

a) *Si determini la matrice della proiezione parallela nella direzione di* $\overrightarrow{v}$ *sul piano di vista* π.
b) *Stabilire se si tratta di una proiezione ortogonale o obliqua.*

Soluzione:

a) π ha coordinate omogenee $N(3,-1,1,-1)$ e la direzione $\overrightarrow{v}$ corrisponde al punto improprio $C(1,1,1,0)$. Di conseguenza la matrice della proiezione è

$$M = N^tC - (N \cdot C)I_4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 3I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

b) La direzione ortogonale a π è $(3,-1,1)$ (Notiamo che è il vettore corrispondente alle prime tre componenti delle coordinate omogenee N di π); la proiezione è parallela a $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$. Poichè i vettori $(3,-1,1)$ e $(1,1,1)$ non sono proporzionali rappresentano direzioni differenti e si tratta quindi di una proiezione obliqua. (Ricordiamo che una proiezione ortogonale è una proiezione parallela di direzione ortogonale al piano di vista).

□

Esercizio 8.9 (12.24)**.** *Siano* $M = (1,1,1)$, $N = (3,2,1)$, $L = (1,2,2)$ *punti dello spazio* $\mathbf{R}^3$. *Sia* $C = (-1,0,1)$.
a) *Si calcoli l'area del triangolo* MNL.
b) *Si determini l'insieme* $M'N'L'$ *che si ottiene proiettando il triangolo* MNL *dal centro* C *sul piano* $x+y=0$.
c) *Si calcoli l'area del triangolo* $M'N'L'$.

Soluzione:

a) L'area del triangolo di vertici MNL è la metà dell'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{LN}$, dove

$$u = \overrightarrow{MN} = (2,1,0), \qquad v = \overrightarrow{LN} = (2,0,-1)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogrammo cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -i + 2j - 2k = (-1,2,-2)$$

Infine

$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2}|u \times v| = \frac{1}{2}|(-1,2,-2)| = \frac{3}{2}$$

In alternativa si poteva calcolare l'altezza del triangolo di base LN sfruttando la proiezione del vettore $u = \overrightarrow{MN}$ su $v = \overrightarrow{LN}$:

$$pr_v(u) = \frac{(u,v)}{(v,v)}v = \frac{4}{5}(2,0,-1)$$

Il vettore $u - pr_v(u) = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)$ è ortogonale a v e corrisponde all'altezza del triangolo di base v. Quindi

$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2} \cdot |(2,0,-1)| \cdot \left| \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

b) Il vettore delle coordinate omogenee del piano è $P = (1,1,0,0)$ e il punto C ha coordinate omogenee $C = (-1,0,1,1)$. La matrice di proiezione è quindi

$$A = P^TC - (P \cdot C)I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$M' = M \cdot A = (-1, 1, 3, 3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1\right) \quad \Rightarrow \quad M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$
$$N' = N \cdot A = (-2, 2, 6, 6) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1\right) \quad \Rightarrow \quad N' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$
$$L' = L \cdot A = (-2, 2, 5, 4) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1\right) \quad \Rightarrow \quad L' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

Infine il triangolo viene proiettato nel segmento $M'L'$.

In alternativa si potevano calcolare le proiezioni senza utilizzare le coordinate omogenee e la matrice di proiezione A. Per esempio per calcolare M' si poteva calcolare la retta

$$CM : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Il punto M' è dato dall'intersezione tra la retta CM e il piano $x + y = 0$:

$$M' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ 1 + 2t + 1 + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

Analogamente si potevano ottenere gli altri punti. Questo procedimento è naturalmente più lungo.

c) Il triangolo $M'N'L'$ è degenere, quindi ha area nulla.

$\square$