CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 6– GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 6.1 (7.64)**.** *Dati i vettori linearmente indipendenti* $v_1 = (3, 0, 1)$ *e* $v_2 = (1, 4, -2)$ *completare l'insieme* $S = \{v_1, v_2\}$ *in modo da ottenere una base di* $\mathbf{R}^3$.

SOLUZIONE:

Si può completare la base utilizzando uno dei vettori canonici. Si tratta quindi di affiancare a v_1 e v_2 i tre vettori canonici di $\mathbf{R}^3$, per verificare quale di questi forma assieme a v_1 e v_2 un insieme linearmente indipendente. Riduciamo quindi a gradini la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 4III + 7II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

□

Di conseguenza qualsiasi dei vettori della base canonica forma con v_1 e v_2 una matrice di rango 3, ovvero un insieme linearmente indipendente. Possiamo prendere per esempio

$$\mathcal{B} = \{(3, 0, 1),\ (1, 4, 2),\ (1, 0, 0)\}$$

□

Esercizio 6.2 (7.65)**.** *Siano*

$$v_1 = (1, -1, -1, 1),\ v_2 = (k, 1, 1, -1)\ \in \mathbf{R}^4$$

a) *Si trovino i valori del parametro* k *per i quali* v_1 *e* v_2 *sono indipendenti.*
b) *Per* $k = 2$, *si estenda l'insieme* $\{v_1, v_2\}$ *a una base di* $\mathbf{R}^4$.

SOLUZIONE:

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice costituita da v_1 e v_2 e dai quattro vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + I \\ III - II \\ IV + III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) I due vettori v_1 e v_2 sono indipendenti quando la matrice ad essi associata ha rango 2. Di conseguenza v_1 e v_2 sono indipendenti se $k \neq -1$.
b) Ponendo $k = 2$ nella matrice ridotta otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Una base di $\mathbf{R}^4$ deve essere formata da quattro vettori. Dalla matrice notiamo che se aggiungiamo alle prime due colonne, corrispondenti a v_1 e v_2, la quarta e quinta colonna (per esempio) otteniamo una matrice di rango quattro. Quindi i quattro vettori corrispondenti sono linearmente indipendenti e una base di $\mathbf{R}^4$ è data dall'insieme:

$$\{\ v_1,\ v_2,\ (0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0)\ \}$$

□

Esercizio 6.3 (8.8)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$A = \mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base di Nucleo e Immagine di* T.
b) *Stabilire se* $(-3, 2, 1)$ *appartiene a* T.

Soluzione:

a)
$$\mathrm{Im}(T) = \{A \cdot v \mid v \in \mathbf{R}^2\}$$

Sia quindi $v = (x, y)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^2$, l'immmagine di T è formata dai vettori

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x \\ x-y \end{bmatrix} = (1,2,1) \cdot x + (1,0,-1)y$$

In sostanza $\mathrm{Im}(T)$ è lo spazio generato dalle colonne di A:

$$\mathrm{Im}(T) = \langle (1,2,1),\ (1,0,-1) \rangle$$

Riduciamo perciò A a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice A ha rango 2 e le due colonne sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (1,0,-1)\}$$

Analogamente il nucleo di T è

$$\mathrm{N}(T)) = \{v \in \mathbf{R}^2 \mid A \cdot v = 0\}$$

Sia quindi $v = (x, y)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^2$, il nucleo di T è formato dalle soluzioni di

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

In sostanza il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A. Usando la matrice ridotta è immediato vedere che l'unica soluzione è il vettore nullo $(0,0)$, quindi $\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$.

b) Il vettore $w = (-3, 2, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se appartiene allo spazio generato dalle colonne di A, ovvero se ammette soluzione il sistema $Ax = w$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

Il sistema non ammette soluzione, quindi $w = (-3, 2, 1)$ non appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

- Nucleo di T: corrisponde alle soluzioni del sistema omogeneo associato a A.
- Immagine di T: corrisponde allo spazio generato dai vettori colonna di A.
- w appartiene all'immagine di T se il sistema $A|w$ ha soluzione, cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

□

Esercizio 6.4 (8.7). *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1, 2, 1)$, $T(e_2) = (1, 0, -1)$.*

a) *Esplicitare $T(x, y)$.*
b) *Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).*
c) *Stabilire se $(3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.*

Soluzione:

a) Il generico vettore $v = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ si può esprimere come $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$. Quindi per la linearità di T:

$$T(v) = x \cdot T(e_1) + y \cdot T(e_2) = x \cdot (1,2,1) + y \cdot (1,0,-1) = (x+y,\ 2x,\ x-y)$$

b) La matrice associata a A è la matrice che ha per colonne le immagini della base canonica di $\mathbf{R}^2$ (espresse rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$). Avendo già $T(e_1)$ e $T(e_2)$ è immediato ricavare:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Il vettore $w = (3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se esiste $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tale che $T(x,y) = w$, ovvero se $(x+y, 2x, x-y) = (3,4,1)$. Si tratta quindi di stabilire se il seguente sistema ammette soluzione:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x=4 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow (3,4,1) = T(2,1) \in \mathrm{Im}(T)$$

Utilizzando la matrice associata al sistema, era sufficiente verificare se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

□

Esercizio 6.5 (8.6)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.

a) *Verificare che* T *è lineare.*
b) *Determinare Nucleo e Immagine di* T.
c) *Determinare la matrice* A *associata a* T *(rispetto alle basi canoniche).*
d) *Determinare* $T(1,2)$ *usando la definizione e usando la matrice* A.

Soluzione:

a) Dobbiamo verificare che

$$T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_i \in \mathbf{R}^2$$
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in \mathbf{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

Siano quindi $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, allora

$$\begin{aligned} T(v_1+v_2) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2, 2x_1+2x_2, x_1+x_2-y_1-y_2) \\ T(v_1)+T(v_2) &= (x_1+y_1, 2x_1, x_1-y_1) + (x_2+y_2, 2x_2, x_2-y_2) \\ &= (x_1+x_2+y_1+y_2, 2x_1+2x_2, x_1+x_2-y_1-y_2) \end{aligned}$$

Quindi la prima proprietà è verificata. Analogamente

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \\ \lambda T(v) &= \lambda(x+y, 2x, x-y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \end{aligned}$$

Anche la seconda proprietà è verificata, quindi T è lineare.

b) Per definizione

$$\mathrm{N}(T) = \{v \in \mathbf{R}^2 \mid T(v) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+y, 2x, x-y) = (0,0,0)\} \subseteq \mathbf{R}^2$$

Si tratta quindi di cercare le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(v) \mid v \in \mathbf{R}^2\} \subseteq \mathbf{R}^3 \\ &= \{(x+y, 2x, x-y) \mid x,y \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(1,2,1)x + (1,0,-1)y \mid x,y \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle (1,2,1),\ (1,0,-1) \rangle \end{aligned}$$

A questo punto per trovare una base di $\mathrm{Im}(T)$ dobbiamo studiare la dipendenza lineare dei generatori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango due e i due generatori di $\mathrm{Im}(T)$ sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (1,0,-1)\}.$$

c) La matrice A ha per colonne le immagini dei vettori della base di $\mathbf{R}^2$ espressi come combianzione lineare degli elementi della base di $\mathbf{R}^3$. Nel caso in cui le basi siano quelle canoniche la cosa è immediata:

$$T(e_1) = T(1,0) = (1,2,1), \qquad T(e_2) = T(0,1) = (1,0,-1)$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che per risolvere il punto b) conveniva forse calcolare prima la matrice associata a T e poi lavorare sulla matrice.

d) Con la definizione di T:

$$T(1,2) = (1+2, 2 \cdot 1, 1-2) = (3,2,-1)$$

Con la matrice A

$$T(1,2) = A \cdot (1,2)^T = (3,2,-1)$$

□

Esercizio 6.6 (8.9)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi: \quad x + 2y = 0$.

Soluzione:

Il piano π ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow \quad \pi = \{(x,y,z) = (-2t,t,s) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$$

Notiamo che poichè il piano passa per l'origine, i suoi punti costituiscono uno spazio vettoriale.

L'immagine del generico punto $(x,y,z) = (-2t,t,s)$ di π è quindi data da

$$T(x,y,z) = A \cdot (x,y,z) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7t \\ -5t \\ 2t+s \end{bmatrix} = (7t, -5t, 2t+s).$$

Infine l'immagine di π è il piano di equazioni parametrica e cartesiana:

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = -5t \\ z = 2t+s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R}, \qquad \Rightarrow \qquad 5x + 7y = 0$$

□

Esercizio 6.7 (8.11)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ la funzione lineare definita da*

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1)$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Trovare una base del nucleo* $\ker(T)$ *e una base dell'immagine* $\operatorname{Im}(T)$.
b) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
c) *Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1-k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?*

Soluzione:

Ricordiamo che $\operatorname{Im}(T)$ è generata da

$$T(e_1) = (1,1,0,0,-1), \qquad T(e_2) = (-1,1,1,1,-1)$$
$$T(e_3) = (0,0,0,3,0), \qquad T(e_4) = (0,0,0,0,0)$$

Quindi la dimensione di $\operatorname{Im}(T)$ equivale al rango della matrice associata a tali vettori.

Inoltre v_k appartiene all'immagine di T se $v_k \in \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4) \rangle$.

Per rispondere a tutte le tre domande riduciamo a gradini la matrice associata al sistema lineare necessario per rispondere al punto c).

$$A|v_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ \\ IV-III \\ V+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1-k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 2III-II \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Dalla matrice dei coefficienti ridotta ricaviamo che questa ha rango 3 e che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(T)) &= \mathrm{rg}(A) = 3 \\ \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} \\ &= \{(1,1,0,0,-2),\ (-1,1,1,1,0),\ (0,0,0,3,0)\} \end{aligned}$$

Inoltre dal teorema di nullità più rango sappiamo che

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\text{spazio di partenza})$$

Quindi

$$\dim(\ker(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 - 3 = 1$$

Per ricavare esplicitamente la base $\mathcal{B}(\ker(T))$ notiamo che

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in \ker(T)$$

$$\text{sse}$$

$$T(v) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + x_3T(e_3) + x_4T(e_4) = 0$$

Quindi gli elementi del nucleo sono le soluzioni del sistema omogeneo associato a $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ e $T(e_4)$.

In sostanza basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A ridotta precedentemente a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(\ker(T)) = \{\ (0,0,0,1)\ \}$$

Anche senza utilizzare il teorema di nullità più rango potevamo ricavare esplicitamente da qui la dimensione del nucleo.

b) Abbiamo visto al punto precedente che

$$\begin{aligned} &\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 < 5 = \dim(\mathbf{R}^5) \;\Rightarrow\; T \text{ non è suriettiva} \\ &\dim(\ker(T)) = 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; T \text{ non è iniettiva} \end{aligned}$$

c) Il vettore $v_k \in \mathrm{Im}(T)$ se il sistema impostato all'inizio è compatibile. Dalla terza riga della matrice ridotta a gradini vediamo che deve essere $k = 0$. In tale caso il rango della matrice completa e incompleta è 3, quindi il sistema è compatibile. Calcoliamo le soluzioni (anche se non era effettivamente richiesto) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 2 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \end{cases} \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi
$$v_0 = T(1,1,1,t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$
□

Esercizio 6.8 (8.30)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Stabilire se T invertibile.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T.*

Soluzione:

a) T invertibile se è biiettiva, cioè suriettiva e iniettiva, ovvero se la matrice A ha rango 4. In sostanza T è invertibile se e solo se lo è A.
Riduciamo a gradini la matrice A:
$$\begin{array}{r} \\ 1/2II + I \\ III + 1/2II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ III \\ II \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
A ha rango 3 quindi T non è invertibile. Notiamo che potevamo immediatamente affermare che $\mathrm{rg}(A) < 4$ in quanto A ha la quarta colonna multipla della terza.
Probabilmente per rispondere alla domanda a) era più comodo calcolare il determinante di A (che è immediato sviluppando rispetto alla seconda riga), ma la riduzione ci serviva comunque per il punto successivo.

b) Poichè le prime tre colonne di A contengono un pivot, ne segue che
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,-2,1,0),\ (0,0,1,1),\ (-1,0,0,-1)\}$$
Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A:
$$\begin{cases} x - z + w = 0 \\ y = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ w = t \end{cases}$$
Quindi
$$\mathcal{B}(N(T)) = \{\ (0,0,1,1)\ \}$$
□

Esercizio 6.9 (8.32)**.** *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice*
$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.*
b) *Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$ al variare di k.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice scambiando la prima e quarta colonna:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 1 & 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ III - II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ III \\ II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi per ogni k
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 < 4 \text{ e } T \text{ non è suriettiva.}$$
$$\dim(N(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 1 \text{ e } T \text{ non è iniettiva.}$$

□

Esercizio 6.10 (8.17).

a) *Verificare che le relazioni*

$$T(1,1,1) = (-1,2), \quad T(0,1,1) = (0,4), \quad T(1,1,0) = (2,1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T *da* $\mathbf{R}^3$ *a* $\mathbf{R}^2$.

b) *Scrivere la matrice rappresentativa di* T *rispetto alla basi canoniche.*

c) *Trovare basi di* $Im(T)$ *e di* $N(T)$.

Soluzione:

a) E' sufficiente verificare che l'insieme

$$\{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (1,1,0)\}$$

su cui è definita la relazione costituisce una base di $\mathbf{R}^3$:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

La matrice ha determinante diverso da zero, quindi ha rango 3 e l'insieme costituisce una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Dobbiamo determinare le immagini degli elementi e_i della base canonica di $\mathbf{R}^3$. Dal momento che conosciamo $T(v_i)$, $i = 1,2,3$, dobbiamo esprimere ogni e_i come combinazione lineare dei vettori v_i. Senza la necessità di risolvere sistemi, è immediato verificare che

$$e_1 = v_1 - v_2, \qquad e_3 = v_1 - v_3, \qquad e_2 = v_2 - e_3 = v_2 - v_1 + v_3$$

Per la linearità di T ricaviamo ora le immagini degli elementi della base canonica:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) = T(1,1,1) - T(0,1,1) = (-1,2) - (0,4) = (-1,-2) \\ T(e_3) &= T(v_1) - T(v_3) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = (-1,2) - (2,1) = (-3,1) \\ T(e_2) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = T(0,1,1) - T(1,1,1) + T(1,1,0) \\ &= (0,4) - (-1,2) + (2,1) = (3,3) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Riduciamo a gradini la matrice A

$$\begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Una base dell'immagine è quindi:

$$\mathcal{B}(Im(T)) = \{T(e_1) = (-1,-2),\ T(e_2) = (3,3)\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} -x + 3y - 3z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{7}{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(T)) = \left\{ \left(4, \frac{7}{3}, 1\right) \right\}$$

□

Esercizio 6.11 (8.19). *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x,y,z) = (2x, y+z)$$

(1) *Dato il vettore* $w = (1,1,1)$, *calcolare* $T(w)$.
(2) *Determinare la matrice* $A = M(T)$ *associata a* T *rispetto alle basi canoniche.*
(3) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* A.
(4) *Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^2$ *e* $\ker(T) \subseteq \mathbf{R}^3$.
(5) *Verificare che l'insieme* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *con* $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$ *è una base di* $\mathbf{R}^3$.
(6) *Determinare la matrice* $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *e alla base canonica di* $\mathbf{R}^2$.

(7) *Determinare la matrice P di cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$.*
(8) *Determinare le componenti del vettore $w = (1,1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ utilizzando la matrice P (o meglio P^{-1}).*
(9) *Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B.*

Soluzione:

(1) Per calcolare $T(w)$ basta applicare la definizione:
$$T(1,1,1) = (2\cdot 1, 1+1) = (2,2)$$
(2) Per calcolare A dobbiamo calcolare l'immagine dei vettori della base canonica:
$$T(e_1) = T(1,0,0) = (2,0), \qquad T(e_2) = T(0,1,0) = (0,1), \qquad T(e_3) = T(0,0,1) = (0,1)$$
La matrice A ha come colonne $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
(3) Utilizzando la matrice A si ottiene
$$T(w) = A\cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
Notiamo che abbiamo ovviamente ottenuto lo stesso risultato del punto (1).
(4) L'immagine di T è generata dai vettori colonna di A:
$$\mathrm{Im}(T) = \langle\ T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)\ \rangle = \langle\ (2,0),\ (0,1),\ (0,1)\ \rangle$$
Dalla matrice A si vede che
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 2, \qquad \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2,0),\ (0,1)\}$$
Il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:
$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$
Di conseguenza
$$\ker(T) = \{(0,-1,1)\cdot t \mid t \in \mathbf{R}\} = \langle\ (0,-1,1)\ \rangle$$
$$\dim(\ker(T)) = 1, \qquad \mathcal{B}(\ker(T)) = \{(0,-1,1)\}$$
(5) Per verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\, v_2,\, v_3\}$ con $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$ calcoliamo il rango della matrice che ha per colonne i tre vettori:
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
La matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3, e l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\, v_2,\, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
(6) Per determinare la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$,di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbf{R}^2$, come al punto (2), calcoliamo l'immagine di v_1, v_2 e v_3 attraverso T:
$$T(v_1) = T(2,1,0) = (4,1), \qquad T(v_2) = T(0,1,0) = (0,1), \qquad T(v_3) = T(1,0,1) = (2,1)$$
Notiamo che tali immagini (appartenenti allo spazio di arrivo) sono espresse come richiesto rispetto alla base canonica. La matrice B ha come colonne $T(v_1),\ T(v_2),\ T(v_3)$:
$$B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
(7) La matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{C}$:
$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è l'inversa di P

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(8) Per esprimere w rispetto a $\mathcal{B}$ basta calcolare $P^{-1} \cdot w$:

$$w_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot w^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e w ha componenti $(0,1,1)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$w = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3$$

In alternativa possiamo esprimere w come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 risolvendo l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$ la cui matrice associata è:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 2II - I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$w = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3 \quad \Rightarrow \quad w = (0,\ 1,\ 1)_{\mathcal{B}}$$

(9) Avendo espresso w in termini della base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ possiamo ora calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B:

$$T(w_{\mathcal{B}}) = B \cdot w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (1) e del punto (3), in quanto $T(w) \in \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^2$, e anche lavorando con la matrice B abbiamo mantenuto come base di $\mathbf{R}^2$ la base canonica.

□

Esercizio 6.12 (8.36). *Sia* $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) *Si trovi una base del nucleo di* S *e una base dell'immagine di* S.
b) *Sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^4$ *e sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita dai vettori*

$$v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (1,0,0),\ v_3 = (1,1,1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ *associata a* S.

Soluzione:

Determiniamo la matrice A associata a S rispetto alle basi canoniche calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{array}{c} S(e_1) = (3,4,1) \\ S(e_2) = (0,-2,0) \\ S(e_3) = (-2,2,2) \\ S(e_4) = (1,3,2) \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = M(S) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 4I \\ III - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

Una base dell'Immagine di S è data da

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x+2z+2w=0 \\ -2y-6z-5w=0 \\ -8z-5w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6}{5}t \\ y=t \\ z=t \\ w=-\dfrac{8}{5}t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(S))=\{(6,5,5,-8)\}$$

b) La matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S rispetto alla basecanonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^4$ e alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ ha per colonne la immagini $S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3)$ espresse però rispetto alla base $\mathcal{B}$. Avendo già calcolato tali immagini, si tratta ora di esprimere $S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3),\ S(e_4)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Scriviamo quindi la matrice associata ai 4 sistemi $xv_1+yv_2+zv_3=S(e_i)$, considerando contemporaneamente i quattro vettori:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III-I \\ II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Risolviamo ora i quattro sistemi

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y=-2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow S(e_1)=(-3,2,4)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow S(e_2)=(2,0,-2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -y=4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow S(e_3)=(0,-4,2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -y=1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow S(e_4)=(-1,-1,3)_{\mathcal{B}}$$

Infine

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 9 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 6.13 (8.37)**.** *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ definita da*

$$T(x,y,z)=(3x-2y,\ x+y+z,\ 2x-3y-z)$$

a) *Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.*
b) *Si scriva la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}=\{(2,1,0),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\}$.*
c) *Trovare la distanza euclidea tra il punto $P=(1,1,1)$ e il nucleo $N(T)$.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice A associata a T rispetto alla base canonica:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 3II-I \\ III-2II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(Im(T))=\{T(e_1),\ T(e_2)\}=\{(3,1,2),\ (-2,1,-3)\}$$

Il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = -\frac{5}{3}t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(T)) = \left\{ \left(\frac{2}{3}, 1, -\frac{5}{3} \right) \right\}, \quad \text{ovvero} \quad \mathcal{B}(N(T)) = \{(2,3,-5)\}$$

b) Notiamo che $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, quindi è sottinteso che la stessa base $\mathcal{B}$ va considerata sia nello spazio di partenza che in quello di arrivo, e $M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice che ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$, espresse ancora rispetto a $\mathcal{B}$.
Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i tre vettori di $\mathcal{B}$. Dalla definizione di T otteniamo:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(2,1,0) = (4,3,1), \\ T(v_2) &= T(1,1,0) = (1,2,-1), \\ T(v_3) &= T(0,1,1) = (-2,2,-4) \end{aligned}$$

Qui però le immagini $T(v_i)$ sono espresse rispetto alla base canonica. Per esprimere $T(v_i)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1,2,3$. Se (x_i, y_i, z_i) è la soluzione di tale equazione, allora le coordinate di $T(v_i)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $T(v_i) = (x_i, y_i, z_i)_{\mathcal{B}}$.

Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora il sistema associato alle prime 4 colonne:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y + 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$T(v_1) = (4,3,1) = 2v_1 + 0v_2 + 1v_3 = (2,0,1)_{\mathcal{B}}$$

Consideriamo il sistema associato alle prime 3 colonne e alla quinta:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + 2z = 3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$T(v_2) = (1,2,-1) = -2v_1 + 5v_2 - 1v_3 = (-2,5,-1)_{\mathcal{B}}$$

Consideriamo il sistema associato alle prime 3 colonne e alla sesta:

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ y + 2z = 6 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 14 \\ z = -4 \end{cases}$$

$$T(v_3) = (-2,2,-4) = -8v_1 + 14v_2 - 4v_3 = (-8,14,-4)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo consisteva nell'utilizzare la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di cambiamento di base, di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$. Sia

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

c) Abbiamo visto al punto a) che il nucleo di T è la retta

$$N(T): \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = -5t \end{cases}$$

Il piano π perpendicolare a N(T) e passante per P è $\pi: \; 2x + 3y - 5z = 0$. Inoltre $\pi \cap N(T) = A(0,0,0)$. Infine

$$d(N(T), P) = d(A, P) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

□

Esercizio 6.14 (8.44)**.** *Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1), \; (0,2,2), \; (0,0,3)\}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) *Si scriva la matrice associata a S rispetto alle basi canoniche.*
b) *Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.*

Soluzione:

a) La matrice cercata ha per colonne $S(e_1)$, $S(e_2)$ e $S(e_3)$. Per determinare tali immagini possiamo procedere in due modi.

Se vogliamo utilizzare direttamente la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ dobbiamo scrivere e_1, e_2 e e_3 rispetto alla base $\mathcal{B}$. Chiamiamo $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ e $v_3 = (0,0,3)$ i tre vettori di $\mathcal{B}$; si tratta quindi di risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ con $i = 1,2,3$. Riduciamo a gradini la matrice associata alle tre equazioni contemporaneamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

In realtà la matrice è già ridotta (triangolare superiore), quindi possiamo risolvere i tre sistemi.

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow e_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow e_2 = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}}$$

Possiamo usare ora la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ per calcolare le imamgini di e_i, ricordando però che il risultato ottenuto è ancora espresso rispetto rispetto a $\mathcal{B}$, mentre noi dobbiamo esprimerlo rispetto alla base canonica:

$$S(e_1) = M_{\mathcal{B}}(S) \cdot e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= (0,0,0)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0,0,0)$$
$$S(e_2) = M_{\mathcal{B}}(S) \cdot e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 - \frac{1}{3} \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$
$$S(e_3) = M_{\mathcal{B}}(S) \cdot e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

Infine

$$A = M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo consiste nel ricavare direttamente le immagini di e_1 dalla matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$, sfruttando la linearità di S. Sappiamo infatti che una matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ espressi ancora rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi

$$S(1,1,1) = (0,0,1)_{\mathcal{B}}, \qquad S(0,2,2) = (0,0,2)_{\mathcal{B}}, \qquad S(0,0,3) = (0,1,3)_{\mathcal{B}}$$

Ricaviamo e_1, e_2 e e_3 come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$:

$$(0,0,1) = \frac{1}{3}(0,0,3)$$
$$(0,1,0) = \frac{1}{2}(0,2,2) - \frac{1}{3}(0,0,3)$$
$$(1,0,0) = (1,1,1) - \frac{1}{2}(0,2,2)$$

Per la linearità di S otteniamo quindi:

$$S(0,0,1) = \frac{1}{3}(0,1,3)_{\mathcal{B}} = \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$
$$S(0,1,0) = \frac{1}{2}(0,0,2)_{\mathcal{B}} - \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}} = \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 - \frac{1}{3} \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$
$$S(1,0,0) = (0,0,1)_{\mathcal{B}} - \frac{1}{2}(0,0,2)_{\mathcal{B}} = (0,0,0)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0,0,0)$$

Infine

$$S(e_1) = (0,0,0), \qquad S(e_2) = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \qquad S(e_3) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

e la matrice associata a S rispetto alla base canonica è:

$$A = M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

b) Conviene utilizare la matrice A in modo da ottenere vettori già espressi rispetto alla base canonica. Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ 3II \\ 3III \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{\ (0,-2,-2),\ (0,2,11)\ \}$$

Per ricavare il nucleo di S risolviamo il sistema omogeneo associato a A

$$\begin{cases} -y+z=0 \\ 9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(S)) = \{\ (1,0,0)\ \}$$

□

Esercizio 6.15 (9.1)**.** *Verificare che $v=(1,0,0,1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita*

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1-2x_3,\ -x_1+2x_2+x_3+x_4,\ x_3,\ x_1-2x_3+x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

Soluzione:

Calcoliamo $T(v)$:

$$T(1,0,0,1) = (2,\ -1+1,\ 0,\ 1+1) = (2,\ 0,\ 0,\ 2) = 2\cdot v$$

Quindi v è autovettore associato all'autovalore 2.

□

Esercizio 6.16 (9.2)**.** *Sia $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x,\ y+3z,\ x+y-z)$$

a) *Verificare che i vettori $v_1=(0,3,1)$, $v_2=(0,-1,1)$ e $v_3=(-1,1,0)$ sono autovettori di T e determinare i rispettivi autovalori.*
b) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B}=\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
c) *Determinare la matrice (diagonale) D associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*
d) *Determinare la matrice diagonalizzante P (cioé la matrice P tale che $P^{-1}AP=D$).*

Soluzione:

a) Calcoliamo le immagini dei vettori v_i:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(0,3,1) = (0,6,2) = 2v_1, \\ T(v_2) &= T(0,-1,1) = (0,2,-2) = -2v_2, \\ T(v_3) &= T(-1,1,0) = (-1,1,0) = v_3 \end{aligned}$$

quindi v_1 è autovettore rispetto all'autovalore 2, v_2 è autovettore rispetto all'autovalore -2, v_3 è autovettore rispetto all'autovalore 1.

b) Verifichiamo che la matrice associata ai tre vettori $v_1,\ v_2$ e v_3 ha determinante non nullo:

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1\cdot(3+1)\neq 0$$

I tre vettori sono quindi linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}^3$.

c) Abbiamo già visto che $v_1,\ v_2$ e v_3 sono autovettori, quindi:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= 2v_1 = 2v_1+0v_2+0v_3 &\Rightarrow&& T(v_1) &= (2,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) &= -2v_2 = 0v_1-2v_2+0v_3 &\Rightarrow&& T(v_2) &= (0,-2,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) &= v_3 = 0v_1+0v_2+1v_3 &\Rightarrow&& T(v_3) &= (0,0,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

e la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale

$$D = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

d) Utilizzando il metodo della matrice di transizione per determinare la matrice D, sappiamo che la matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$).

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Di conseguenza la matrice D associata a T rispetto alla nuova base è $D = P^{-1}AP$. La matrice

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è quindi la matrice diagonalizzante cercata.

□