CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 5– GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 5.1 (7.49)**.** *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1, a_1 - a_2 + 2a_3, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(1,1,2,1) + a_2(0,-1,-1,3) + a_3(0,2,0,0) + a_4(0,0,0,1)$$

Siano

$$v_1 = (1,1,2,1), \qquad v_2 = (0,-1,-1,3), \qquad v_3 = (0,2,0,0), \qquad v_4 = (0,0,0,1)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$).

b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV + 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

In alternativa si può utilizzare il determinante, sviluppato rispetto alla quarta colonna:

$$\det(A) = 1 \cdot [-2(-1)] = 2 \neq 0$$

Poiché il deteminante della matrice A associata ai 4 vettori ha determinante non nullo, $\text{rg}(A) = 4$, quindi i 4 vettori sono linearmenti indipendenti e una base di S è l'insieme $\mathcal{B}(S) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

□

Esercizio 5.2 (7.52)**.** *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(2,1,1,1,0) + a_2(1,-1,-1,3,1) + a_3(0,-3,0,1,0).$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2,1,1,1,0), \quad v_2 = (1,-1,-1,3,0), \quad v_3 = (0,-3,0,1,0).$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^5$).

b) Si tratta di stabilire quali vettori tra $v_1,\ v_2$ e v_3 sono linearmente indipendenti. Consideriamo quindi la matrice associata a v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \\ IV - II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 3IV + 4II \\ 3V + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Anche senza ridurre completamente la matrice si vede che questa ha rango tre, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di S:

$$\mathcal{B}(S) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

□

Esercizio 5.3 (7.54)**.** *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \ \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Soluzione:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = k \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 0$
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{\ (0, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

E' ora evidente che ogni elemento di S si può scrivere nella forma

$$(0, -1, 1) \cdot t$$

quindi una base di S è data dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{(0, -1, 1)\}$$

□

Esercizio 5.4 (7.55)**.** *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + 4ky - 2z = 0 \ \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Soluzione:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x - 2y + kz = k - 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4ky - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 1$.

b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x - 2y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{\ (2s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

Separiamo le variabili nella scrittura del generico elemento di S:

$$(2s, s, 0) + (-t, 0, t) = (2, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 1) \cdot t$$

Quindi S è generato dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{(2, 1, 0),\ (-1, 0, 1)\}$$

Per come è stato calcolato, e comunque sarebbe immediato verificarlo, l'insieme $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente, quindi si tratta effettivamente di una base di S.

□

Esercizio 5.5 (7.59)**.** *Sia*

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 - 4x_2 - x_3 + 2kx_4 = k + 1,\ 2x_1 - kx_3 + kx_4 = 2k + 2,\right.$$
$$\left. 3x_1 - 4kx_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0\ \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Le soluzioni di un sistema formano uno spazio vettoriale sse il sistema è omogeneo:

$$\begin{cases} k + 1 = 0 \\ 2k + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow\ k = -1$$

b) Cerchiamo le soluzioni del sistema nel caso $k = -1$ riducendo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 16 & 12 & 9 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}t \\ x_2 = \frac{3}{8}t \\ x_3 = t \\ x_4 = -2t \end{cases} \qquad \forall\ t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow S = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, 1, -2 \right) \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Infine

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, -2, 1 \right) \right\}, \qquad \dim(S) = 1$$

□

Esercizio 5.6 (7.62)**.**

a) *Sia*

$$V = \langle\ (1, 2, 1),\ (-1, 3, 0),\ (3, 1, 2)\ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) *Sia*

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0,\ 2x + 3y + z = 0,\ x + 2z = 0 \right\}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) *Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango della matrice A associata ai tre vettori riducendola a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/5II \\ III - 5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(V) = \operatorname{rg}(A) = 2$$
$$\mathcal{B}(V) = \{\ (1,2,1),\ (-1,3,0)\ \}$$

b) Associamo al sistema omogeneo

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Notiamo che i conti sono già stati eseguiti al punto precedente. Quindi

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

e

$$\dim(S) = 1$$
$$\mathcal{B}(S) = \{\ (-2,1,1)\ \}$$

c) Notiamo che con la stessa matrice abbaimo risolto due esercizi differenti tra cui in genere è facile confondersi. La relazione tra i due esercizi, oltre alla medesima riduzione della matrice, è solo legata alle dimensioni:

$$\dim(V) = \operatorname{rg}(A)$$
$$\dim(S) = \text{numero delle incognite} - \operatorname{rg}(A)$$
$$\dim(V) + \dim(S) = \text{numero delle incognite}$$

□

Esercizio 5.7 (7.69)**.** *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$.

b) *Esprimere* $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$. Di conseguenza ai polinomi p_1, p_2 e p_3 possiamo associamo i tre vettori

$$p_1 = (0,1,1)$$
$$p_2 = (1,2,1)$$
$$p_3 = (-1,1,0)$$

Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre al polinomio $f(x)$ associamo il vettore $f(1, -1, 2)$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III \\ \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente idipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Torniamo al sistema associato ai quattro vettori:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$$

□

Esercizio 5.8 (7.70)**.** *Si considerino i polinomi* $p_1 = x^2 + ax + b + c$, $p_2 = x^2 + bx + a + c$, $p_3 = x^2 + cx + a + b$.
a) *Mostrare che per ogni valore dei parametri* a, b, c *i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi* $\mathbf{R}[x]$.
b) *Calcolare la dimensione e una base dello spazio* $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ *al variare di* a, b, c.

Soluzione:

Associamo ad ogni polinomio il vattore che esprime le sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^2,\ x,\ 1\}$ di $\mathbf{R}[x]$:

$$p_1 = (1, a, b + c), \qquad p_2 = (1, b, a + c), \qquad p_3 = (1, c, a + b)$$

Possiamo quindi svolgere l'esercizio lavorando sui tre vettori.

Consideriamo la matrice associata ai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - aI \\ III - (b+c)I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & a-b & a-c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata ai tre vettori ha sempre rango minore di tre, quindi i tre vettori e i tre polinomi sono linearmente dipendenti.
b) Dal punto a) sappiamo che $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha sicuramente dimensione minore di tre. Inoltre
   – Se $a = b = c$, allora la matrice ha rango 1 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 1. Una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1\}$ (o da $\{p_2\}$ o da $\{p_3\}$).
   – Se $a \neq b$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 2. Inoltre la matrice formata dalle prime due colonne ha sicuramente rango 2, quindi una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1,\ p_2\}$.
   – Se $a \neq c$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 2. Inoltre la matrice formata dalla prima e terza colonna ha sicuramente rango 2, quindi una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1,\ p_3\}$.

□

Esercizio 5.9 (7.71)**.** *Sia* S *il sottoinsieme dello spazio dei polinomi* $\mathbf{R}_3[x]$ *così definito:*

$$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$$

a) *Mostrare che* S *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}_3[x]$.
b) *Determinare la dimensione di* S.

Soluzione:

a) Si tratta di dimostrare che S èchiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   - S è chiuso rispetto a $+$, infatti presi due elementi di S anche la loro somma sta in S:

$$(p_1 + p_2)(0) = p_1(0) + p_2(0) = 0$$

   - S è chiuso rispetto al prodotto per scalari, infatti preso un elemento di S e uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$, anche il loro prodotto sta in S:

$$(\lambda p)(0) = \lambda \cdot p(0) = \lambda \cdot 0 = 0$$

b) Per calcolare la dimensione di S osserviamo innanzitutto che imponendo la condizione $p(0) = 0$ otteniamo:

$$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx \mid a, b, c \in \mathbf{R}\ \}$$

Vogliamo dimostrare che il polinomi $p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x$ costituiscono una base di S. Infatti
   - $p_1(x),\ p_2(x)$ e $p_3(x)$ sono linearmente indipendenti: se

$$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = 0 \ \Rightarrow\ ax^3 + bx^2 + cx = 0 \text{ (polinomio nullo)}$$

   allora $a = b = c = 0$.
   - Per come abbiamo esplicitato S è evidente che ogni elemento di S si può scrivere come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x)$ e $p_3(x)$.

Di conseguenza $p_1(x),\ p_2(x)$ e $p_3(x)$ formano una base di S e S ha dimensione 3.

□

Esercizio 5.10 (7.81)**.** *Sia S l'insieme delle matrici simmetriche:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{R} \right\}$$

(Notiamo anche che $S = \left\{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\right\}$).

a) *Verificare che S è un sottospazio di $M_{2\times 2}$.*
b) *Determinare una base di S.*

Soluzione:

a) Notiamo che la condizione percé una matrice 2×2 appartenga a S è che gli elementi di posto $1, 2$ e $2, 1$ siano uguali.
Verifichiamo le due proprietà richieste per uno spazio vettoriale.
   - SOMMA. Siano

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

   due generici elementi di S. Allora

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in S$$

   - PRODOTTO per scalari. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

   un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix} \in S$$

b) Separiamo i parametri nella generica scrittura di A:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} =$$
$$= a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di S. Infatti:

– Abbiamo appena visto che il generico elemento di S si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.
– Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, infatti:

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 5.11 (7.84)**.** *Si consideri il sottospazio*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3a+b+3c & 2b-6c \\ a+3b-7c & 4a+8c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

dello spazio delle matrici reali $M_2(\mathbf{R})$*.*

a) *Determinare una base di* S*.*
b) *Stabilire se* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2/3 & 8/3 \end{bmatrix} \in S$ *(ed in caso positivo esprimere* A *come combinazione lineare della base trovata in* a)*).*

Soluzione:

a) La generica matrice di S la possiamo scrivere nella forma

$$a \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Quindi se

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

lo spazio S è $S = \langle A_1,\ A_2,\ A_3 \rangle$. Per determinare una base di S dobbiamo stabilire quante e quali di tali matrici sono linearmente indipendenti, ovvero risolvere l'equazione $xA_1 + yA_2 + zA_3 = 0$. La matrice dei coefficienti associata a a tale sistema è

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} I \\ \\ III \\ 1/4IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III-3I \\ IV-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 24 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 1/8III \\ 1/3IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \\ IV+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 2 quindi il sistema ammette infinite soluzioni, le tre matrici sono linearmente dipendenti e $\dim(S) < 3$. Inoltre la matrice dei coefficienti associata all'equazione $xA_1 + yA_2 = 0$, una volta ridotto diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso l'equazione ammette solo la soluzione nulla, quindi A_1 e A_2 sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(S) = 2$ e una base di S è data da

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\quad A_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Si tratta di risolvere l'equazione $xA_1 + yA_2 = A$ ovvero il sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2y = 0 \\ x + 3y = \frac{2}{3} \\ 4x + y = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ y = 0 \\ x = \frac{2}{3} \\ 4x = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Infine

$$A = \frac{2}{3} A_1$$

□

Esercizio 5.12 (7.85)**.** *Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:*

$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio di V.*
b) *Calcolare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A. Allora

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$

   Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S.
   – **prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$

   Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

b) Scriviamo esplicitamente le soluzioni di S imponendo la condizione $AM = MA$.

$$AM = \begin{bmatrix} -8a - 7c & -8b - 7d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$MA = \begin{bmatrix} -8a + b & -7a \\ -8c + d & -7c \end{bmatrix}$$

Quindi

$$MA = AM \Rightarrow \begin{cases} -8a - 7c = -8a + b \\ -8b - 7d = -7a \\ a = -8b + d \\ b = -7c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 7c = 0 \\ 7a - 8b - 7d = 0 \\ a + 8b - d = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema omogeneo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 7I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -56 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - 8II \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a = -8t + s \\ b = -7t \\ c = t \\ d = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi gli elementi di S sono del tipo

$$M = \begin{bmatrix} -8t + s & -7t \\ t & s \end{bmatrix}$$

Ovvero

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s \ |\forall s, t \in \mathbf{R} \right\}$$

Di conseguenza S ha dimensione 2 e una sua base è data dall'insieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

□

Esercizio 5.13 (7.88)**.** *Sia $W = \langle A,\ B\ , C\rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Cominciamo a stabilire quando le tre matrici sono linearmente indipendenti risolvento l'equazione matriciale $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} y + kz & ky + z \\ kx - 2y + (k-1)z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y + kz = 0 \\ ky + z = 0 \\ kx - 2y + (k-1)z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ kx = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

- Se $k \neq 0$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti:

$$\dim(W) = 3$$
$$\mathcal{B}(W) = \{A,\ B,\ C\}$$

- Se $k = 0$ otteniamo la sola soluzione $x = t$, $y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente dipendenti. In particolare A è la matrice nulla e $A = 0 \cdot B + 0 \cdot C$ dipende linearmente da B e C. Se studiamo invece la dipendenza di B e C risolvendo l'equazione $yB + zC = 0$ otteniamo la sola soluzione $y = z = 0$ quindi B e C sono linearmente indipendenti (Infatti B e C non sono una multiplo dell'altra). Di conseguenza

$$\dim(W) = 2$$
$$\mathcal{B}(W) = \{B,\ C\}$$

□