CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 4– GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 4.1 (5.10). *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,2),\ v_2 \equiv (2,4,6),\ v_3 \equiv (-1,2,5),\ v_4 \equiv (1,1,10)$$

determinare se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3*. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

SOLUZIONE:

Si tratta di risolvere l'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Consideriamo il sistema (non omogeneo) in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ 2x + 6y + 5z = 10 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 4 & 2 & | & 1 \\ 2 & 6 & 5 & | & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 7 & | & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2y + 3z = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$v_4 = 9v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

Notiamo che anzicchè fermarci alla matrice ridotta a gradini potevamo arrivare alla scrittura della matrice in forma normale, ovvero alla matrice che ha solo elementi sulla diagonale e questi sono tutti 1 o 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1/4III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I + III \\ II - 3III \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/2II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I - 2II \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Ritornando al sistema in questo caso otteniamo direttamente

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

ovvero

$$v_4 = 9v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

□

Esercizio 4.2 (5.12). *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,3,1),\ v_2 \equiv (2,k,-1),\ v_3 \equiv (-1,k-1,0),\ v_4 \equiv (1,15,7)$$

determinare per quali valori del parametro reale k*,* v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3*. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & k & k-1 & | & 15 \\ 1 & -1 & 0 & | & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II-3I \\ III-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 3III+(k-6)II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 4k & | & 6k \end{bmatrix}$$

Torniamo ora al sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad -3y + z = 6 \\ \qquad 4kz = 6k. \end{cases}$$

Per Rouchè Capelli il sistema ha sempre soluzione (ne ha una se $k \neq 0$ e ne ha infinite se $k = 0$).

Per trovare le soluzioni siamo costretti a distinguere due casi.

- Se $k \neq 0$, l'ultima equazione si può dividere per $4k$ per cui otteniamo la seguente soluzione

$$\begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

  Di conseguenza se $k \neq 0$ abbiamo ottenuto la seguente (unica) combinazione lineare:

$$v_4 = \frac{11}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 + \frac{3}{2}v_3.$$

- Se $k = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t+7 \\ y = t \\ z = 3t+6. \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

  Quindi anche se $k = 0$ il vettore v_4 si può esprimere come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3:

$$v_4 = (t+7) \cdot v_1 + t \cdot v_2 + (3t+6) \cdot v_3 \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$

  In questo caso le possibili combinazioni lineari sono infinite.

□

Esercizio 4.3 (7.22). *Siano dati i segunti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,1), \qquad v_2 \equiv (2,7,7), \qquad v_3 \equiv (0, k^2+2, 3), \qquad v_4 \equiv (1, k+3, k^2+2).$$

Stabilire se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *al variare del parametro* k*.*

Soluzione:

Si tratta di stabilire se il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione. Consideriamo la matrice associata a tale sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 7 & k^2+2 & | & k+3 \\ 1 & 7 & 3 & | & k^2+2 \end{bmatrix}$$

Per Rouchè - Capelli il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.

Riduciamo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{r} \\ II-I \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & k^2+2 & | & k+2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & | & k^2-k-1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il pivot della terza riga e distinguiamo i casi necessari.

- Se $k \neq \pm 1$ sia la matrice completa che quella incompleta hanno 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette (una unica) soluzione. Di conseguenza v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

- Se $k = 1$ la matrice diventa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$
Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.
- Se $k = -1$ la matrice diventa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$
Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

□

Esercizio 4.4 (5.17). *Date le matrici*
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
stabilire se D è combinazione lineare di A, B, C.

Soluzione:
Si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione
$$Ax + By + Cz = D$$
Esplicitando tale equazione otteniamo:
$$Ax + By + Cz = \begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & y \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & z \\ 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y - z & 2x + y + z \\ -x + y + 2z & 3x + y + 3z \end{bmatrix}$$
Quindi:
$$\begin{bmatrix} x + 2y - z & 2x + y + z \\ -x + y + 2z & 3x + y + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \\ 3x + y + 3z = 2 \end{cases}$$
Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni i tre incognite:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 1 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 2I \\ III + I \\ IV - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 6 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + II \\ 3IV - 5II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ 4IV - 3III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}$$
Tornando al sistema notiamo che l'ultima equazione è $0 = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione e D non è combinazione lineare di A, B e C.

□

Esercizio 4.5 (5.18). *Date le matrici*
$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A, B. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Soluzione:
Analogamente all'esercizio precedente si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione
$$Ax + By = C$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By = \begin{bmatrix} x & kx \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 3y \\ y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ kx+3y=6 \\ y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ kx+3=6 \\ y=1 \\ x+2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ kx=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ k=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Quindi

- Se $k = 3$ il sistema ammette la sola soluzione $x = y = 1$ e $A + B = C$, come è immediato verificare.
- Se $k \neq 3$ il sistema non ammette soluzione e C non è combinazione di A e B.

□

Esercizio 4.6 (7.27)**.** *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2,1,1), \qquad v_2 \equiv (-1,1,2), \qquad v_3 \equiv (3,-2,-1), \qquad v_4 \equiv (4,-1,-2).$$

Determinare una base di V. Esprimere inoltre v_1, v_2, v_3 e v_4 come combinazione lineare degli elementi di tale base.

Soluzione:

Dalla teoria sappiamo che m vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^n$ generano un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ di dimensione $m \leq n$. E' evidente che trattandosi di 4 vettori di $\mathbf{R}^3$ i vettori sono sicuramente linearmente dipendenti.

Per rispondere a entrambe le domande calcoliamo comunque il rango della matrice A associata ai quattro vettori riducendola a gradini, in modo da individuare quale (o quali) vettore dipende linearmente dagli altri.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Procedendo con il metodo di Gauss otteniamo le matrici equivalenti

$$\begin{array}{c} \\ 2II - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ 3III - II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Si può osservare che $\text{rg}(A) = 3$, quindi tre dei quattro vettori di partenza sono linearmente indipendenti. In particolare anche la matrice formata dalle prime tre colonne, ovvero da v_1, v_2 e v_3 ha rango 3. Quindi può essere presa come base di V l'insieme

$$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

Notiamo che la scelta dei vettori non è affatto unica. Per esempio anche i vettori v_1, v_2 e v_4 sono linearmente indipendenti e possono essere presi come elementi di una base di V.

Si tratta ora di esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, ovvero di risolvere l'equazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Notiamo che la riduzione a gradini della matrice associata a tale equazione vettoriale l'abbiamo già effettuata per determinare il rango della matrice associata ai quattro vettori:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{array}\right]$$

Tornando al sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3y - 7z = -6 \\ 10z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{10} \\ y = -\frac{13}{10} \\ z = \frac{3}{10} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$v_4 = \frac{9}{10}v_1 - \frac{13}{10}v_2 + \frac{3}{10}v_3.$$

Inoltre si ha banalmente:

$$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3, \qquad v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3, \qquad v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3$$

□

Esercizio 4.7 (7.25). *In* $\mathbf{R}^3$ *siano*

$$v_1 = (k, 2, 1), \quad v_2 = (-2, 1, 0), \quad v_3 = (0, 1, 1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *i tre vettori costituiscono una base di* $\mathbf{R}^3$.
b) *Per i valori trovati al punto* a), *si calcolino le coordinate del vettore* $v = (-2, 1, 2)$ *rispetto a tale base.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 e dal vettore v come colonna dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} k & -2 & 0 & | & -2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III \\ \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ k & -2 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - kI \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & -2 & -k & | & -2-2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -k-2 & | & -2k-8 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti ha rango 3 se $k \neq -2$, quindi v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$ se $k \neq -2$.
b) Risolviamo, per $k \neq -2$, il sistema $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ di cui abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = -3 \\ (k+2)z = 2k + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{k+2} \\ y = \frac{-k+2}{k+2} \\ z = \frac{2k+8}{k+2} \end{cases}$$

Infine v ha coordinate $\left(-\dfrac{4}{k+2}, \ \dfrac{-k+2}{k+2}, \ \dfrac{2k+8}{k+2}\right)$ rispetto a $\{v_1, \ v_2, \ v_3\}$.

□

Esercizio 4.8 (7.35). *Sia* $V = \langle \ v_1, \ v_2, \ v_3 \ \rangle$ *con*

$$v_1 = (k+3, \ k+3, \ 0), \qquad v_2 = (0, \ 3, \ k+2), \qquad v_3 = (0, \ 3k, \ k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* $k \in \mathbf{R}$ *lo spazio* V *coincide con* $\mathbf{R}^3$.
b) *Si determini la dimensione una base di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:

Consideriamo la matrice A associata ai tre vettori:

$$A = \begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ k+3 & 3 & 3k \\ 0 & k+2 & k \end{bmatrix}$$

a) Lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$ se $\dim(V) = 3$, cioè se $\text{rg}(A) = 3$. Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{matrix} \\ II - I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3k \\ 0 & k+2 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/3II \\ III - (k+2)/3\,II \end{matrix} \begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & -k^2-k \end{bmatrix}$$

La matrice ha 3 pivot se $k \neq -3, -1, 0$, mentre ha rango 2 se $k = -3, -1, 0$ Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti, e $V = \mathbf{R}^3$, se $k \neq 0, -1, -3$.

L'esercizio può essere risolto in maniera più semplice utilizzando il concetto di determinante.

b) Abbiamo già osservato che se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(V) = 3$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_1, \ v_2, \ v_3\}$. Inoltre:
– Se $k = 0$ la matrice A, ridotta, diventa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_1, \ v_2\}$.

– Se $k = -1$ la matrice A, ridotta, diventa:
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\dim(V) = 2$ e una possibile base è $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.

– Se $k = -3$ la matrice A, ridotta, diventa:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$
Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_2,\ v_3\}$.

$\square$

Esercizio 4.9 (7.36)**.** *Sia V lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, -2, 4, 0)$, $v_2 = (2, 3, -1, 1)$ e $v_3 = (0, -1, 3, 0)$:*
$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3 \rangle$$

(1) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale V.*
(2) *Determinare se il vettore $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*
(3) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \rangle$.*

Soluzione:

Per potere rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione
$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II + 2I \\ III - 4I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & -9 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ IV \\ 1/3III \\ II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + 3II \\ IV - 7II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV + III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Possiamo ora risponedere alle domande.

(1) Per determinare la dimensione dello spazio vettoriale V calcoliamo il rango della matrice A dei coefficienti:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
La matrice ha 3 pivot, quindi $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 3$.
.

(2) Per determinare se il vettore $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ appartiene a V consideriamo la matrice completa. Poiché $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette soluzione:
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$
Di conseguenza il vettore v_4 appartiene a V:
$$v_4 = v_1 + v_2$$

(3) Per determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \rangle$ consideriamo la matrice completa B:
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso la matrice ha 3 pivot, quindi

$$\dim(W) = \mathrm{rg}(B) = 3$$

Notiamo che potevamo risponedere a questa domanda semplicemente osservando che dal punto predente sappiamo che $v \in V$, quindi $W = V$ e $\dim(W) = \dim(V) = 3$.

$\square$