CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 3– GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 3.1 (4.1)**.** *Risolvere il seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Soluzione:

A ogni sistema lineare associamo la matrice $A|b$, dove A è la matrice formata dai coefficienti delle incognite e b è la matrice dei termini noti. I termini noti vengono separati da un tratteggio. Notiamo che il sistema equivale all'equazione matriciale $A \cdot (x, y, z)^T = b$.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizzeremo il **metodo di Gauss** o di **Riduzione a gradini**. Lo scopo è di ottenere una matrice in cui sotto il primo termine non nullo di ogni riga si trovano tutti 0. Tale termine è detto **pivot**.

$$\begin{bmatrix} \star & \star & \star & | & \star \\ 0 & \star & \star & | & \star \\ 0 & 0 & \star & | & \star \end{bmatrix}$$

Una volta che la matrice è stata ridotta ritorniamo al sistema, ormai di immediata soluzione.

Il procedimento consiste nel trasformare il sistema in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) mediante le seguenti operazioni lecite:

- Scambio di due righe della matrice.

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} III \\ II \\ I \end{bmatrix}$$

- Sostituzione di una riga con un suo multiplo **non nullo**.

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII \\ III \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0$$

- Sostituzione di una riga con la sua somma con un'altra riga.

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ II + I \\ III \end{bmatrix}$$

- Le ultime due operazioni vengono generalmente utilizzate contemporaneamente, sostituendo una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga, prestando attenzione ad alcune situazioni che vedremo esplicitamente negli esercizi.

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII + bI \\ III \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0$$

  Notiamo in particolare la condizione $a \neq 0$, mentre non c'è nessuna condizione sul coefficiente b. In sostanza è necessario che il coefficiente della riga che stiamo sostituendo sia non nullo (in questo caso la seconda).
- Scambio di due colonne della matrice. In tale caso si scambia la posizione di due incognite. Al termine della riduzione, quando si ritorna al sistema, è quindi necessario ricordare lo scambio delle incognite. Per tale ragione useremo questo scambio solo se realmente conveniente.

Procediamo ora alla riduzione. Notiamo che la prima riga è l'unica che rimarrà invariata nella riduzione. Inoltre è la più utilizzata nelle operazioni di riduzione. Per queste ragioni è generalmente conveniente avere come prima riga quella più semplice (cioè con più zeri e senza parametri nel caso di sistemi parametrici).

$$\begin{matrix} II \\ I \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/2II \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III+I \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1/3III \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2III-II \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

A questo punto la matrice è ridotta a gradini, possiamo quindi ritornare al sistema:

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \\ -z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Notiamo che per non correre il rischio di effettuare due volte la stessa operazione abbiamo utilizzato per modificare una riga solo le combinazioni lineari con le righe che la precedono.

Seguiremo in generale questo principio, quindi, a parte gli scambi di righe,

- La prima riga può essere sostituita solo con un suo multiplo,
- La seconda riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima,
- La terza riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima o con la seconda.
- ...

□

Esercizio 3.2 (4.2)**.** *Risolvere il seguente sistema omogeneo:*

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w = 0. \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & | & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-3I \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Torniamo ora al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ y + 4z + 2w = 0 \\ -2z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15t \\ y = -8t \\ z = \frac{3}{2}t \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

L'insieme delle soluzioni scritte in forma vettoriale è quindi dato da

$$S = \left\{ (x, y, z, w) = \left(15, -8, \frac{3}{2}, 1\right) \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

□

Esercizio 3.3 (4.3)**.** *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2z &= 4 \\ x + y + kz &= k \\ x + 2y + 3z &= 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*

b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 1 & 1 & k & | & k \\ 1 & 2 & 3 & | & 2k \end{bmatrix}$$

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo la matrice a gradini.

Per ridurre la matrice a gradini scambiamo la prima e la terza riga. Lo scopo di questa operazione è *spostare i parametri verso il basso.*

Se così non facessimo nella riduzione a gradini dovremmo necessariamente procedere nel seguente modo:

$$\begin{array}{r} \\ kII - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-4 \\ 0 & 1 & 3-k & | & k \end{bmatrix}$$

Il sistema così ottenuto non è però equivalente a quello iniziale nel caso $k = 0$. Infatti per $k = 0$ abbiamo sostituito la seconda riga con la prima riga cambiata di segno, operazione non lecita. Nelle regole date inizialmente sulla sostituzione di una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga:

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII + bI \\ III \end{bmatrix}$$

era infatti richiesta la condizione $a \neq 0$ (notiamo invece che non c'è nessuna richiesta sul valore di b). Procedendo in questo modo dovremmo poi considerare il caso $k = 0$ separatamente, riprendendo la matrice precedente all'operazione non lecita.

Effettuiamo invece con lo scambio delle righe:

$$\begin{array}{r} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 1 & 1 & k & | & k \\ k & k & k^2 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 0 & -1 & k-3 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & | & 4-k^2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che in questo caso l'operazione è lecita anche per $k = 0$ (quando in pratica lasciamo la terza riga invariata).

a) L'ultima equazione del sistema è $0 = 4 - k^2$ che non risulta impossibile solo se $4 - k^2 = 0$, ovvero $k = \pm 2$. In tali casi il sistema ammette soluzione.
   Quindi il sistema è compatibile se $k = \pm 2$.

b) Consideriamo separatamente i casi $k = \pm 2$.
   - Per $k = 2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -t + 2 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

   - Per $k = -2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ -y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = -5t - 2 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che il punto a) poteva essere affrontato in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli. La matrice A dei coefficienti ha solamente due pivot, quindi $\text{rg}(A) = 2$; per quanto riguarda la matrice $A|b$ dobbiamo invece distinguere due casi: se $k \neq \pm 2$ la matrice $A|b$ ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A|b) = 3$, mentre se $k = 2$ o $k = -2$ anche la matrice $A|b$ ha 2 pivot, quindi $\text{rg}(A|b) = 2$. Quindi per il teorema di Rouchè-Capelli:

- Se $k \neq \pm 2$, $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzione;
- Se $k = 2$ o $k = -2$, $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema ammette soluzione; notiamo che in questi casi le soluzioni sono infinite perché il rango è inferiore al numero delle incognite.

□

Esercizio 3.4 (7.1)**.** *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro* $t \in \mathbf{R}$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

- Consideriamo la matrice A_1. Visto che A_1 è ridotta a gradini è immediato calcolarne il rango utilizzando i pivot:
  - Se $t+1$ e $t-3$ sono non nulli, ovvero se $t \neq -1, 3$, allora A_1 ha tre pivot e $\text{rg}(A_1) = 3$.
  - Se $t = -1$ la matrice diventa:
  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - 4II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  Quindi se $t = -1$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1) = 2$.
  - Se $t = 3$ la matrice diventa:
  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  Quindi se $t = 3$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1) = 2$.
- Anche se la matrice A_2 non è completamente ridotta a gradini possiamo comunque calcolarne il rango ragionando sui pivot.
  - Se $t \neq -1$ la matrice A_2 ha tre pivot e quindi $\text{rg}(A_2) = 3$. Notiamo che anche nei casi particolari $t = 3$ e $t = 0$ otteniamo una matrice con tre pivot, infatti:
    * Se $t = 3$:
    $$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
    Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.
    * Se $t = 0$:
    $$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
    Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.
  - Se $t = -1$ otteniamo la matrice
  $$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III + 4II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  Quindi se $t = -1$ la matrice A_2 ha due pivot e $\text{rg}(A_2) = 2$.
- Riduciamo a gradini della matrice A_3:
$$\begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III - tI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 0 & 1 & -4 & 1-t \\ 0 & 0 & -2t & -t^2 \end{bmatrix}$$
Se ragioniamo sui pivot otteniamo:
  - Se $t \neq 0$ la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A_3) = 3$.
  - Se $t = 0$ la matrice A_3 diventa
  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  quindi ha 2 pivot e $\text{rg}(A_3) = 2$.

□

Esercizio 3.5 (7.3)**.** *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Sia $x = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ e calcoliamo Ax:

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ (2t+1)x_3 \end{bmatrix}$$

L'equazione $Ax = b$ si traduce quindi nel sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases}$$

La matrice associata a tale sistema è quindi formata dalla matrice A come matrice dei coefficienti e dalla matrice b come matrice dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Per stabilire l'esistenza e l'unicità delle soluzioni utilizziamo il teorema di **Rouchè-Capelli**:

Un sistema di equazioni $AX = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$rg(A) = rg(A|b)$$

Inoltre:

- *Ammette un'unica soluzione se $rg(A) = rg(A|b) =$ numero delle incognite.*
- *Ammette infinite soluzioni se $rg(A) = rg(A|b) <$ numero delle incognite.*

Notiamo che il numero delle incognite del sistema corrisponde al numero delle colonne di A.

Riduciamo quindi $A|b$ a gradini per calcolarne il rango:

$$\begin{matrix} \\ II + I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 5 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Si tratta quindi di distinguere due casi.

- Se $t \neq -\dfrac{1}{2}$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_2 - x_3 = 3 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2t+14}{5(2t+1)} \\ x_2 = \dfrac{6t+8}{5(2t+1)} \\ x_3 = \dfrac{5}{2t+1} \end{cases}$$

- Se $t = -\dfrac{1}{2}$, allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzioni.

□

Esercizio 3.6 (7.5)**.** *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1-k)z = 1 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

ammette un'unica soluzione.

Soluzione:

Dal teorema di Rouchè Capelli sappiamo che il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|b$ associata a tale sistema per calcolarne il rango:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - kI \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + (k-1)II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & | & -k \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione se il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa sono entrambi tre. Dalla matrice ridotta questo avviene per $k \neq 0, 2$.

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che per $k = 2$ il sistema non ammette soluzione, mentre per $k = 0$ ne ammette infinite.

□

Esercizio 3.7 (7.7)**.** *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = k + 3 \\ -2x + 6y + (k+7)z = 2k + 9 \\ x - 4y - 2z = k - 2 \\ 3x - 6y + (k-7)z = k^2 - k - 9 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione e per quali k ne ammette infinite.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ -2 & 6 & k+7 & | & 2k+9 \\ 1 & -4 & -2 & | & k-2 \\ 3 & -6 & k-7 & | & k^2-k-9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 2I \\ III + I \\ IV + 3I \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & -2 & 1 & | & 2k+1 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III + II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-4 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $k^2 - 4 = 0$ se $k = \pm 2$, e che $k + 2 = 0$ se $k = -2$. Di conseguenza:
   – Se $k \neq \pm 2$ allora $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$ quindi il sistema non ammette soluzione.
   – Se $k = 2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema ammette una unica soluzione.
   – Se $k = -2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $k = 2$:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 \\ 2y + 3z = 3 \\ 4z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Consideriamo il caso $k = -2$:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8t - 10 \\ y = t \\ z = 2t - 3 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

.

□

Esercizio 3.8 (7.10)**.** *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + ky + z = 2k - 1 \\ kx + y + z = 5 \\ x + y + kz = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è risolubile.*
b) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette un'unica soluzione.*

Soluzione:
Dal teorema di Rouchè Capelli sappiamo che il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$, e ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|b$ associata a tale sistema per calcolarne il rango:

$$\begin{bmatrix}1 & k & 1 & | & 2k-1\\ k & 1 & 1 & | & 5\\ 1 & 1 & k & | & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III\\ I\\ II\end{array}\begin{bmatrix}1&1&k&|&0\\1&k&1&|&2k-1\\k&1&1&|&5\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ II-I\\ III-kI\end{array}\begin{bmatrix}1&1&k&|&0\\0&k-1&1-k&|&2k-1\\0&1-k&1-k^2&|&5\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{c}\\ \\ III+II\end{array}\begin{bmatrix}1&1&k&|&0\\0&k-1&1-k&|&2k-1\\0&0&-k^2-k+2&|&2k+4\end{bmatrix}$$

Notiamo che $-k^2 - k + 2 = 0$ se $k = 1$ o $k = -2$, di conseguenza:

- Se $k \neq 1, -2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema è risolubile.
- Se $k = 1$ otteniamo la matrice:
$$\begin{bmatrix}1&1&1&|&0\\0&0&0&|&1\\0&0&0&|&6\end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema non è risolubile.
- Se $k = -2$ otteniamo la matrice:
$$\begin{bmatrix}1&1&-2&|&0\\0&-3&3&|&-5\\0&0&0&|&0\end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ ke il sistema è risolubile, con infinite soluzioni.

In conclusione:

a) Il sistema ammette soluzione se $k \neq 1$.
b) Il sistema ammette una unica soluzione soluzione se $k \neq 1, -2$ (Per $k = -2$ il sistema ammette infinite soluzioni).

.

□

Esercizio 3.9 (v. 7.12)**.** *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases}(1+k)x = 0\\ ky + z + w = 2\\ x + kz + 2w = k\\ x + kw = 0\end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema

$$A|b = \begin{bmatrix}1+k&0&0&0&|&0\\0&k&1&1&|&2\\1&0&k&2&|&k\\1&0&0&k&|&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV\\ II\\ III\\ I\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&k&|&0\\0&k&1&1&|&2\\1&0&k&2&|&k\\1+k&0&0&0&|&0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-I\\ IV-(k+1)I\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&k&|&0\\0&k&1&1&|&2\\0&0&k&2-k&|&k\\0&0&0&-k(k+1)&|&0\end{bmatrix}$$

a) Il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$. Notiamo che è sufficiente verificare che sia $\text{rg}(A) = 4$ perché in tal caso anche la matrice completa ha necessariamente rango 4. Quindi il sistema ammette una unica soluzione quando $k \neq 0, -1$.

b) Torniamo al sistema nel caso $k = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z + w = 2 \\ 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \\ w = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che l'esercizio può essere risolto in maniera più semplice utilizzando il concetto di determinante, non ancora introdotto.

□

Esercizio 3.10 (v. 6.7)**.** *Si calcoli la matrice inversa della seguente matrice A*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

Soluzione:

Calcoliamo l'inversa di A con il metodo della riduzione affiancando ad A la matrice identità I_3:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} -I \\ -1/4II \\ III + I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + 4II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} I - 2II \\ \\ 1/2III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} I - III \\ \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 3.11 (v. 6.6)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.*

Soluzione:

a) Riduciamo A a gradini:

$$II - kI \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad III - 2II \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k \\ 0 & 0 & -3+2k \end{bmatrix}$$

La matrice A è invertibile se ha rango masimo, ovvero se $k \neq \frac{3}{2}$.

b) Determiamo l'inversa di A per $k = 1$ calcolando $rref(A)$ dopo avere affiancato a A la matrice identica:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow II - I \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 2II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} I + III \\ II + III \\ -III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Alcune cose possono essere svolte in maniera differente utilizzando il concetto di determinante, non ancora introdotto.

□

Esercizio 3.12 (6.11)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango di A riducendola a gradini, ricordando che una matrice è invertibile se ha rango massimo (in questo caso 3):

$$\begin{matrix} \\ \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+kII \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & 0 & k(k-4) \end{bmatrix}$$

A ha tre pivot, e quindi rango 3, se $k(k-4) \neq 0$. Quindi A è invertibile se $k \neq 0, 4$.

b) Per determinare l'inversa di A calcoliamo $rref(A)$ dopo avere affiancato a A la matrice identica, tenendo conto delle condizioni $k \neq 0, 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III+kII \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k(k-4) & -2 & k & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{k(k-4)}III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow II-(k-4)III \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} I-kII \\ \Rightarrow \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{array}\right]$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix} \qquad \forall k \neq 0, 4$$

□