

Esercizio 2.1. *Dati i punti $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(1,3)$, determinare l'isometria $f(x,y) = (x',y')$ tale che $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ nei seguenti casi. Stabilire in particolare se si tratta di una traslazione, rotazione, riflessione e glissoriflessione trovando gli eventuali punti fissi.*

- a) $O' = \left(-3, \frac{1}{2}\right)$, $A' = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $B' = \left(-2, \frac{7}{2}\right)$.
 b) $O' = (1, 0)$, $A' = \left(\frac{5-2\sqrt{2}}{3}, \frac{1+4\sqrt{2}}{3}\right)$, $B' = \left(\frac{4-6\sqrt{2}}{3}, \frac{3+2\sqrt{2}}{3}\right)$.
 c) $O' = (0, 0)$, $A' = \left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$, $B' = \left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right)$.
 d) $O' = (-2, 1)$, $A' = \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$, $B' = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

SOLUZIONE:

- a) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che sia l'angolo $0\widehat{A}B$ che l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ sono antiorari, quindi si tratta di una trasformazione diretta: una rotazione o una traslazione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -3 = a \\ \frac{1}{2} = b \\ -1 = 2c - s + a \\ \frac{3}{2} = 2s + c + b \\ -2 = c - 3s + a \\ \frac{7}{2} = s + 3c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{1}{2} \\ s = 2c - 2 \\ \frac{3}{2} = 4c - 4 + c + \frac{1}{2} \\ -2 = c - 3s - 3 \\ \frac{7}{2} = s + 3c + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{1}{2} \\ s = 0 \\ c = 1 \\ -2 = -2 \\ \frac{7}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x,y) = \left(x - 3, y + \frac{1}{2}\right)$$

che è una traslazione e non ha punti fissi. La mancanza di punti fissi si può anche verificare direttamente impostando il sistema

$$f(x,y) = (x,y) \Rightarrow \begin{cases} x = x - 3 \\ y = y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

che non ha soluzione.

- b) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che sia l'angolo $0\widehat{A}B$ che l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ sono antiorari, quindi si tratta di una trasformazione diretta: una rotazione o una traslazione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = a \\ 0 = b \\ \frac{5-2\sqrt{2}}{3} = 2c - s + a \\ \frac{1+4\sqrt{2}}{3} = 2s + c + b \\ \frac{4-6\sqrt{2}}{3} = c - 3s + a \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3} = s + 3c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ \frac{5-2\sqrt{2}}{3} = -4s + \frac{2+8\sqrt{2}}{3} - s + 1 \\ c = -2s + \frac{1+4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4-6\sqrt{2}}{3} = c - 3s + 1 \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3} = s + 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ s = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ c = \frac{1}{3} \\ \frac{4-6\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} - 2\sqrt{2} + 1 \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2\sqrt{2}}{3}y + 1, \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3}y \right)$$

che è una rotazione. Possiamo quindi trovare il punto fisso (centro di rotazione) impostando il sistema

$$f(x, y) = (x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}x - \frac{2\sqrt{2}}{3}y + 1 \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2\sqrt{2}y = 3 \\ y = \sqrt{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Quindi il centro di rotazione è il punto fisso $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

- c) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che l'angolo $0\hat{A}B$ è antiorario mentre l'angolo $0'\hat{A}'B'$ è orario, quindi si tratta di una trasformazione inversa: una riflessione o una glissoriflessione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases}$$

Notiamo che poiché $O = O'$, il punto O è fisso, quindi si tratta di una riflessione in quanto le glissoriflessioni non hanno punti fissi.

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = a \\ 0 = b \\ \frac{9}{5} = c + 3s + a \\ \frac{13}{5} = s - 3c + b \\ -\frac{2}{5} = 2c + s + a \\ \frac{11}{5} = 2s - c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = \frac{9}{5} - 3s \\ \frac{13}{5} = s - \frac{27}{5} - 9s \\ -\frac{2}{5} = 2c + s \\ \frac{11}{5} = 2s - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -\frac{3}{5} \\ s = \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{4}{5} \\ \frac{11}{5} = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x, y) = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \right)$$

che è una riflessione. Possiamo quindi trovare la retta di punti fissi (asse di simmetria) impostando il sistema

$$f(x, y) = (x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$$

Quindi tutti i punti della retta $y = 2x$ sono punti fissi e $y = 2x$ è l'asse di simmetria.

- d) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che l'angolo $0\hat{A}B$ è antiorario mentre l'angolo $0'\hat{A}'B'$ è orario, quindi si tratta di una trasformazione inversa: una riflessione o una glissoriflessione. Si tratta quindi di cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -2 = a \\ 1 = b \\ \frac{3}{5} = c + 3s + a \\ -\frac{4}{5} = s - 3c + b \\ \frac{1}{5} = 2c + s + a \\ \frac{7}{5} = 2s - c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = \frac{13}{5} - 3s \\ -\frac{4}{5} = s - \frac{39}{5} + 9s + 1 \\ \frac{1}{5} = 2c + s - 2 \\ \frac{7}{5} = 2s - c + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = \frac{4}{5} \\ s = \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} - 2 \\ \frac{7}{5} = \frac{6}{5} - \frac{4}{5} + 1 \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x, y) = \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2, \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 \right)$$

che è una glissoriflessione. Infatti impostando il sistema

$$f(x, y) = (x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \\ y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 10 \\ 9y = 9y + 25 \end{cases}$$

non otteniamo soluzioni. □

Esercizio 2.2 (1.2). Per ognuna delle seguenti coppie di matrici A , B e scalari λ , $\mu \in \mathbf{R}$, calcolare $A + B$, $B - A$, $\lambda A + \mu B$, AB , BA , A^2 :

$$\begin{array}{lll} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} & \lambda = \frac{1}{2}, \mu = 0 \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda = 2, \mu = -1 \end{array}$$

SOLUZIONE:

Cominciamo dalla prima coppia di matrici:

$$\begin{array}{ll} A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} & B - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ \lambda A + \mu B = \frac{1}{2} \cdot A + 0 \cdot B = \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & AB = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} & A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Analogamente per la seconda coppia di matrici:

$$\begin{array}{ll} A + B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & B - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \lambda A + \mu B = 2A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & -7 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} & AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 11 & -4 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 21 & -4 & -10 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

□

Esercizio 2.3 (1.3). *Date le seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_6 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i \cdot A_j$ per $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

SOLUZIONE:

Ricordiamo che una matrice è detta $n \times m$ se ha n righe e m colonne. Inoltre è possibile moltiplicare due matrici A e B solamente se

- A è del tipo $n \times m$
- B è del tipo $m \times k$

(cioè se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B). Il risultato è una matrice C del tipo $n \times k$.

Scriviamo solo i prodotti che è possibile effettuare:

$$A_1 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 32 \\ 26 & -4 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 0 & -14 \\ -5 & 11 & 20 & -22 \end{bmatrix} \quad A_2 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} -8 & -20 \\ 11 & -10 \end{bmatrix} \quad A_2 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 8 \\ 4 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A_3 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 25 \\ 8 & -4 & -1 \\ 20 & -23 & 30 \\ -4 & -7 & 23 \end{bmatrix} \quad A_3 \cdot A_6 = \begin{bmatrix} -15 & 5 & -5 \\ -13 & 9 & 7 \\ -52 & 29 & 11 \\ -7 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A_4 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 20 & -21 & 25 \\ 40 & -28 & 15 \\ 0 & 4 & -10 \end{bmatrix} \quad A_4 \cdot A_6 = \begin{bmatrix} -49 & 28 & 12 \\ -77 & 49 & 31 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_5 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 18 & -8 & -10 & 12 \\ 32 & -12 & -20 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} -12 & 30 \\ -24 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 14 \\ -8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_6 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -15 & 13 \\ 35 & -21 & -40 & 28 \end{bmatrix} \quad A_6 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ -35 & 10 \end{bmatrix} \quad A_6 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ -4 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 2.4 (1.5). *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare $3A - 2B$ e AB^T .

SOLUZIONE:

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} -6 & \frac{3}{2} & 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -6 & \frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{15}{2} & \frac{23}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB^T = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ è detta matrice scalare.

□

Esercizio 2.5 (1.6). *Calcolare la potenza A^3 della matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Si tratta di eseguire due prodotti:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -15 & 5 \\ 5 & 26 & 15 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 2.6 (1.8). *Date le seguenti matrici A , calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Per potere effettuare i prodotti AB e BA , la matrice B deve essere 2×2 . Sia quindi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2 . Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ 3x+3z & 3y+3w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ 3x+3z=0 \\ 3y+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3(1-z)+3z=0 \\ 3(-w)+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3=0 \\ 0=1 \end{cases}$$

La terza e la quarta equazione sono impossibili, di conseguenza tutto il sistema non ammette soluzione. Questo indica che la matrice A non ammette inversa.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2 . Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z & y-w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-w=0 \\ -3x+2z=0 \\ -3y+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=w \\ -3(1+z)+2z=0 \\ -3w+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=w \\ z=-3 \\ w=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=-3 \\ w=-1 \end{cases}$$

Di conseguenza deve essere

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata. Una tale matrice B inversa di A viene normalmente indicata con A^{-1} .

□

Esercizio 2.7 (1.9). *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB , BA , BC e CB .

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} & BA &= \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \\ BC &= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} & CB &= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notiamo che $AB \neq BA$, mentre $BC = CB$. Infatti il prodotto tra matrici non è in generale commutativo; nel secondo caso si presenta questa situazione particolare in quanto $C = 3I$.

□

Esercizio 2.8 (1.10). *Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$)*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I .

SOLUZIONE:

Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

due generici elementi di I . Dobbiamo verificare che $A + B$ e AB sono ancora elementi di I :

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & c+z \end{bmatrix} \in I \\ AB &= \begin{bmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{bmatrix} \in I \end{aligned}$$

Notiamo che l'unica condizione per l'appartenenza a I è che l'elemento di posizione 2, 1 si annulli.

□

Esercizio 2.9 (1.11). *Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.*

SOLUZIONE:

Possiamo prendere per esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti A e B sono non nulle e $AB = 0$.

□

Esercizio 2.10 (1.12). *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda, x \in \mathbf{R}$.

SOLUZIONE:

Sia

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2 . Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = BA$ segue

$$\begin{cases} b_{11} + b_{21} = b_{11} \\ b_{12} + b_{22} = b_{11} + b_{12} \\ b_{21} = b_{21} \\ b_{22} = b_{21} + b_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{21} = 0 \\ b_{22} = b_{11} \\ 0 = 0 \\ b_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = t \\ b_{12} = s \\ b_{21} = 0 \\ b_{22} = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza B deve essere del tipo

$$B = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda, x \in \mathbf{R}$.

□

Esercizio 2.11 (1.13). *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

SOLUZIONE:

E' sufficiente osservare che se

$$A + B = C \Rightarrow -A + A + B = -A + C \Rightarrow B = C - A$$

Quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2+2 & 0-3 \\ -1-0 & 5-5 & 2+6 \\ 2-2 & 1+1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 2.12 (1.18). *Si risolva il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Quindi $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 3x_2 \\ 4 - 6x_2 + 4x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice A è detta **matrice dei coefficienti** e la matrice b **matrice o colonna dei termini noti** del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$$

Si dice anche più semplicemente che A e b (oppure $A|b$) sono le **matrici associate al sistema**.

Notiamo che si può passare da A al sistema o viceversa semplicemente *aggiungendo* o *togliendo* le incognite.

□

Esercizio 2.13 (1.20). Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

a) Calcoliamo il prodotto

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_2 + 6x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

Quindi la condizione $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 + 6x_3 = -3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 = -6 \cdot 2 - 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \cdot (-5) - 2 \cdot 2 + 2 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

b) Scriviamo direttamente il sistema associato a A e b aggiungendo le incognite:

$$\begin{cases} 4x_1 + 33x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 6x_3 = 4 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

Notiamo subito che l'ultima equazione è impossibile, quindi il sistema non ammette soluzione.

c) Scriviamo direttamente il sistema associato a A e b aggiungendo le incognite:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che il sistema ha tre incognite, ma solamente due equazioni (significative). Abbiamo quindi una variabile libera. Partiamo dall'ultima equazione (significativa) aggiungendo un parametro. Poniamo per esempio $x_3 = t$ (Potevamo equivalentemente porre $x_2 = t$):

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3(-t + 4) + t - 3 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che in questo caso il sistema ammette infinite soluzioni: ogni valore assegnato a t permette di trovare una delle infinite soluzioni.

□