CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

CONICHE – GEOMETRIA 2008/09

Equazione

A ogni conica $f(x,y)=0$, possiamo associare due matrici quadrate simmetriche: la matrice $A \in M_{2\times 2}$ relativa alla forma quadratica associata alla conica, e la matrice $A' \in M_{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} \text{coeff. di } x^2 & 1/2 \text{ coeff. di } xy \\ 1/2 \text{ coeff. di } xy & \text{coeff. di } y^2 \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & h \\ h^T & k \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix}, \quad k = \text{termine noto dell'equazione}$$

Di conseguenza l'equazione della conica è $f(x,y) = [x,y,1]\cdot A' \cdot [x,y,1]^T = 0$.

Possiamo inoltre definire gli **invarianti ortogonali** dell'equazione della conica.

- **Invariante cubico**: $I_3 = \det(A')$,
- **Invariante quadratico**: $I_2 = \det(A)$,
- **Invariante lineare**: I_1 = traccia di A = somma degli elementi della diagonale di A = somma degli autovalori di A.

Classificazione.

- Una conica è **non degenere** se $I_3 = \det(A') \neq 0$. Inoltre è:
  - **Ellisse**: se gli autovalori sono concordi, ovvero se $I_2 = \det(A) > 0$.
  - **Iperbole**: se gli autovalori sono discordi, ovvero se $I_2 = \det(A) < 0$.
  - **Parabola**: se ha un autovalore nullo, ovvero se $I_2 = \det(A) = 0$.
- Una conica è **degenere** se $I_3 = \det(A') = 0$. Inoltre:
  - Se $\text{rg}(A') = 2$ è **semplicemente degenere**, ovvero si tratta di una coppia di rette distinte (reali o immaginarie).
  - Se $\text{rg}(A') = 1$ è **doppiamente degenere**, ovvero si tratta di una coppia di rette coincidenti.

Centro e assi o vertice e asse.

- **Centro**
  - Iperbole e ellisse sono coniche a centro. Il centro si determina risolvendo il sistema:
$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$
  - Se la conica è degenere e si tratta di una coppia di rette incidenti, si tratta di una conica a centro. Il centro è il punto di intersezione delle due rette e può anche essere determinato come per le coniche a centro non degeneri.
- **Assi**
  - Gli assi di iperbole e ellisse sono le rette passanti per il centro, aventi direzioni parallele agli autovettori di A.
  - L'asse della parabola è una retta di direzione parallela all'autovettore relativo all'autovalore nullo passante per il vertice. Il **vertice** è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola. Non avendo in generale il vertice, per determinare l'asse si può:
    * Determinare la direzione dell'asse.
    * Determinare la generica equazione di una retta r perpendicolare all'asse.
    * Determinare i punti di intersezione D e E di r con la parabola.
    * Determinare il punto medio M del segmento DE.
    * L'asse è la retta per M di direzione parallela all'autovettore relativo all'autovalore nullo.
    * Una volta nota l'equazione dell'asse si può ricavare il vertice.

Rotazione.

La matrice A è simmetrica, quindi esiste una matrice R ortogonale speciale detta matrice di **rotazione**:

$$R^T A R = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove } \lambda_i \text{ sono autovalori di } A$$

La matrice R si ottiene dagli autovettori di A (normalizzati e con i segni in modo che $\det(R) = 1$).

Forma canonica.

Per ottenere la forma canonica di una conica non degenere, ovvero una delle forme:

- $ax^2 + by^2 - 1 = 0$, ellisse reale,
- $ax^2 + by^2 + 1 = 0$, ellisse immaginario,
- $ax^2 - by^2 - 1 = 0$, iperbole,
- $x^2 - 2py = 0$, parabola,

possiamo utilizzare gli invarianti.

- Calcoliamo $I_3 = \det(A')$ per verificare che la conica non sia degenere.
- Calcoliamo gli autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$ di A e stabiliamo di quale conica si tratta.
- Se si tratta di un'**ellisse** o un'**iperbole** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 \pm by^2 \pm 1 = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

  $$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ autovalori di } A$$

  Poiché I_3 è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per t o $-t$ si ottiene la forma canonica.
- Se si tratta di una **parabola** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $x^2 - 2py = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

  $$\lambda X^2 + 2tY = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda \text{ autovalore non nullo di } A$$

  Poiché I_3 è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per λ si ottiene la forma canonica.

Equazioni della trasformazione.

Passando da un'equazione $f(x, y) =$ alla corrispondente forma canonica $f(X, Y) = 0$ abbiamo effettuato un cambiamento di base corrispondente a una rotazione R (definita dagli autovettori di A) e una traslazione definita dal centro $C(x_0, y_0)$ o dal vertice $V(x_0, y_0)$ della conica. Il cambio di coordinate è dato da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

dove R è la matrice di rotazione, ovvero la matrice diagonalizzante ortogonale speciale associata a A.

Coniche degeneri.

Per determinare le equazioni delle rette che formano che le coniche degeneri si deve risolvere una equazione di secondo grado in cui si considera la x come variabile e la y come parametro, o viceversa.

- Se la conica è semplicemente degenere ($\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette distinte.
- Se la conica è doppiamente degenere ($\text{rg}(A') = 1$) si ottiene una sola retta.
- Se la conica è a centro ($\det(A) \neq 0$, quindi $\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette incidenti nel centro.
- Se è una parabola degenere ($\det(A) = 0$, ma $\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette parallele.