CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

GEOMETRIA – APPELLO DEL 07/09/2010 – A –

Esercizio 1.1. *Si consideri il piano π di equazione $2x + y - z = 0$.*

a) *Determinare la retta r ortogonale a π passante per il punto $A(1, 1, 0)$ e trovare il punto di intersezione $B = r \cap \pi$.*

b) *Tra i piani ortogonali a π e passanti per l'origine, determinare quello passante per A.*

SOLUZIONE:

a) La retta r ha direzione $(2, 1, -1)$, quindi equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Inoltre

$$B = r \cap \pi = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ 2 + 4t + 1 + t + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) Un piano ortogonale a π è parallelo alla retta r, ovvero alla direzione $(2, 1, -1)$. Contenendo l'origine e il punto A, è anche parallelo a $OA = (1, 1, 0)$. Di consequenza il piano cercato ha equazioni

$$\begin{cases} x = 2t + s \\ y = t + s \\ z = -t \end{cases} \qquad \forall t, s \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad x - y + z = 0$$

$\square$

Esercizio 1.2. *Si considerino la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e l'insieme $V = \{B \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid AB = 0\}$.

a) *Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*

b) *Determinare la dimensione e una base di V.*

SOLUZIONE:

a) V è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari, infatti:
   - SOMMA. Se B_1 e B_2 appartengono a V, allora $AB_1 = AB_2 = 0$; di conseguenza $A(B_1+B_2) = AB_1 + AB_2 = 0$ e anche $B_1 + B_2$ appartiene a V.
   - PRODOTTO. Se $B \in V$ e $\alpha \in \mathbf{R}$, allora $(\alpha B)A = \alpha(BA) = 0$, quindi anche αB appartiene a V.

b) Sia

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

la generica matrice di $M_{3,3}(\mathbf{R})$. Di conseguenza:

$$AB = \begin{bmatrix} b_{1,1} + 2b_{2,1} + b_{3,1} & b_{1,2} + 2b_{2,2} + b_{3,2} & b_{1,3} + 2b_{2,3} + b_{3,3} \\ b_{1,1} + 2b_{2,1} & b_{1,2} + 2b_{2,2} & b_{1,3} + 2b_{2,3} \\ 3b_{3,1} & 3b_{3,2} & 3b_{3,3} \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $AB = 0$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} b_{1,1} + 2b_{2,1} = 0 \\ b_{1,2} + 2b_{2,2} = 0 \\ b_{1,3} + 2b_{2,3} = 0 \\ b_{3,1} = b_{3,2} = b_{3,3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{1,1} = -2t \\ b_{2,1} = t \\ b_{1,2} = -2s \\ b_{2,2} = s \\ b_{1,3} = -2h \\ b_{2,3} = h \\ b_{3,1} = b_{3,2} = b_{3,3} = 0 \end{cases} \qquad \forall t, s, h \in \mathbf{R}$$

Infine le matrici B di V sono del tipo

$$B = \begin{bmatrix} -2t & -2s & -2h \\ t & s & h \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot h$$

Le tre matrici

$$B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e generano tutto V, quindi $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\{B_1, B_2, B_3\}$.

□

Esercizio 1.3. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (1, 2, 1, 1), \; v_2 = (1, k+2, 1, 1), \; v_3 = (0, k, 0, k), \; v_4 = (0, 0, k-1, k-1)$$

e $w = (1, k+2, k+1, 1)$, *con* k *parametro reale, e sia* $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

a) *Determinare la dimensione e una base di* V *al variare di* k.
b) *Stabilire per quali* k *il vettore* w *appartiene a* V *e in tali casi trovarne le coordinate rispetto alla base di* V *trovata al punto precedente.*

Soluzione:

Per rispondere ad entrambe le domande, riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione vettoriale $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = w$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & k+2 & k & 0 & k+2 \\ 1 & 1 & 0 & k-1 & k+1 \\ 1 & 1 & k & k-1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III - I \\ IV - III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & 0 & k & 0 & -k \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ IV \\ III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & k & 0 & k \\ 0 & 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & k \end{array}\right]$$

a) Consideriamo la matrice dei coefficienti. Dobbiamo distinguere tre casi:
   – Se $k \neq 0, 1$, lo spazio V ha dimensione 4 e una base di V è $\mathcal{B} = \{v_1, \; v_2, \; v_3, \; v_4\}$.
   – Se $k = 0$, lo spazio V ha dimensione 2 e una base di V è $\mathcal{B} = \{v_1, \; v_4\}$.
   – Se $k = 1$, lo spazio V ha dimensione 3 e una base di V è $\mathcal{B} = \{v_1, \; v_2, \; v_3\}$.
b) Consideriamo ora la matrice completa, distinguendo i tre casi evidenziati al punto precedente:
   – Se $k \neq 0, 1$, abbiamo visto che $V = \mathbf{R}^4$, quindi $w \in V$. Risolviamo il sistema, ridotto, associato all'equazione $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = w$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ kx_2 + kx_3 = k \\ kx_3 = -k \\ (k-1)x_4 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = \frac{k}{k-1} \end{cases} \Rightarrow w = \left(-1, 2, -1, \frac{k}{k-1}\right)_{\mathcal{B}} \quad \text{con } \mathcal{B} = \{v_1, \; v_2, \; v_3, \; v_4\}$$

   – Se $k = 0$, il rango della matrice completa e incompleta coincidono, quindi $w \in V$. Poiché in questo caso la base individuata è $\{v_1, v_4\}$, consideriamo il sistema formato dalla prima e quarta colonna, associato all'equazione $x_1v_1 + x_4v_4 = w$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad w = (1, 0)_{\mathcal{B}} \quad \text{con } \mathcal{B} = \{v_1, \; v_4\}$$

   – Se $k = 1$, la matrice completa ha rango 3, mentre quella dei coefficienti ha rango 2, quindi $w \notin V$.

□

Esercizio 1.4. *Sia* $T : \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ *la funzione lineare definita da*

$$T(p(x)) = p(1) - p(2)x + 2p(-1)x^2.$$

a) *Determinare la matrice associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B} = \{1+x, 1-x, x^2, x+x^3\}$ *nel dominio e* $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2+1\}$ *nel codominio.*

b) *Determinare il nucleo e l'immagine di* T.

Soluzione:

a) Consideriamo i vettori della base dello spazio di partenza e la definizione di T:

$$\begin{array}{llllll}
p_1(x) = 1+x & \Rightarrow & p_1(1) = 2 \quad p_1(2) = 3 & p_1(-1) = 0 & \Rightarrow & T(p_1(x)) = 2 - 3x \\
p_2(x) = 1-x & \Rightarrow & p_1(1) = 0 \quad p_1(2) = -1 & p_1(-1) = 2 & \Rightarrow & T(p_2(x)) = x + 4x^2 \\
p_3(x) = x^2 & \Rightarrow & p_1(1) = 1 \quad p_1(2) = 4 & p_1(-1) = 1 & \Rightarrow & T(p_3(x)) = 1 - 4x + 2x^2 \\
p_4(x) = x+x^3 & \Rightarrow & p_1(1) = 2 \quad p_1(2) = 10 & p_1(-1) = -2 & \Rightarrow & T(p_4(x)) = 2 - 10x - 4x^2
\end{array}$$

Si tratta ora di esprimere i polinomi immagine ottenuti come combinazione lineare dei polinomi della base dello spazio di arrivo $\mathcal{B}' = \{q_1(x) = 1,\ q_2(x) = x,\ q_3(x) = x^2+1\}$

$$\begin{aligned}
&T(p_1(x)) = 2 - 3x = 2q_1(x) - 3q_2(x) = (2, -3, 0)_{\mathcal{B}'} \\
&T(p_2(x)) = x + 4x^2 = -4q_1(x) + q_2(x) + 4q_3(x) = (-4, 1, 4)_{\mathcal{B}'} \\
&T(p_3(x)) = 1 - 4x + 2x^2 = -q_1(x) - 4q_2(x) + 2q_3(x) = (-1, -4, 2)_{\mathcal{B}'} \\
&T(p_4(x)) = 2 - 10x - 4x^2 = 6q_1(x) - 10q_2(x) - 4q_3(x) = (6, -10, -4)_{\mathcal{B}'}
\end{aligned}$$

Infine la matrice associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 6 \\ -3 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo a gradini la matrice trovata al punto precedente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 6 \\ -3 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II + 3I \\ 1/2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & -10 & -11 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 5III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & -10 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

L'immagine di T è lo spazio generato dai tre polinomi, linearmente indipendenti, corrispondenti alle prime tre colonne della matrice:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \left\{2 - 3x,\ x + 4x^2,\ 1 - 4x + 2x^2\right\}$$

Il nucleo dell'immagine di T è dato dalle soluzioni delsistema omogeneo associato a $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$:

$$\begin{cases} 2x - 4y - z + 6w = 0 \\ -10y - 11z - 2w = 0 \\ -6z - 12w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = -2t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \langle (0, 2, -2, 1)_{\mathcal{B}} \rangle$$

Tornando ai polinomi:

$$(0, 2, -2, 1)_{\mathcal{B}} = 2p_2(x) - 2p_3(x) + p_4(x) = 2 - x - 2x^2 + x^3$$

quindi una base del nucle di T è

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \left\{2 - x - 2x^2 + x^3\right\}$$

□

Esercizio 1.5. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^4$ *con matrice associata rispetto alla base canonica:*

$$A = M_{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 2-k & -k & 0 \\ -1 & k & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2-k & -k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Mostrare che il vettore* $v = (1, 0, 0, 1)$ *è autovettore di* T. *Trovare gli autovalori di* T.

b) *Stabilire se esistono valori del parametro reale* k *per i quali l'endomorfismo è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Per verificare che v è autovettore di T dobbiamo stabilire se esiste un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $T(v) = A \cdot v^t = \lambda v$:

$$T(v) = A \cdot v^t = \begin{bmatrix} 2 & 2-k & -k & 0 \\ -1 & k & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2-k & -k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot v$$

quindi v è autovettore di T rispetto all'autovalore $\lambda = 2$.

Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2-k & -k & 0 \\ -1 & k-\lambda & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-k & -k & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)(k-\lambda)$$

Infine gli autovalori di T sono: $\lambda = 1$, almeno doppio, $\lambda = 2$ e $\lambda = k$.

b) Per stabilire se T è diagonalizzabile bisogna determinare la molteplicità geometrica degli autolvalori.

$$E(1) = \mathrm{N}(A - I) : \quad \begin{bmatrix} 1 & 2-k & -k & 0 \\ -1 & k-1 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-k & -k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II + I \\ \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2-k & -k & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \dim(E(1)) = \dim(\mathrm{N}(A-I)) = 4 - \mathrm{rg}(A - I) = 2$$

A questo punto possiamo affermare che

- Se $k \neq 1, 2$, allora m.a.(1) = m.g.$(1) = 2$ e $\lambda = k$ e $\lambda = 2$ sono autovalori singoli, quindi T è diagonalizzabile.
- Se $k = 1$, allora m.a.$(1) = 3 \neq$ m.g.$(1) = 2$ quindi T non è diagonalizzabile.

Resta da considerare il caso $k = 2$, quando $\lambda = 2$ è doppio. In questo caso

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I) : \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ \\ IV + II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\mathrm{rg}(A-2I) = 2$ e $\dim(E(2)) = \dim(\mathrm{N}(A-2I)) = 4-2 = 2$; di conseguenza per $k = 2$ anche la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 2.

Infine se $k = 2$, i due autovalori doppi $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ hanno molteplicità geometrica 2, quindi anche in questo caso T è diagonalizzabile.

In conclusione T è diagonalizzabile per ogni $k \neq 1$.

□

Esercizio 1.6. *Sia* $\mathbf{C}$ *la conica di equazione* $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

a) *Si determini il tipo di conica e la sua forma canonica.*
b) *Si trovi l'eventuale centro della conica e, se esistono, i punti all'infinito di* $\mathbf{C}$.
c) *Si trovino gli assi di simmetria della conica.*

Soluzione:

a) La matrice associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \det(A) = -5 \neq 0$$

e si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 6 > 0$$

quindi si tratta di una conica a centro, in particolare di un'ellisse.

Per trovare la forma canonica calcoliamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 1, 6$. In effetti, poiché gli autovalori sono concordi, si tratta di un'ellisse. La forma canonica cercata è quindi del tipo $x^2 + 6y^2 + t = 0$, a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $\det(A) = \det(B)$ otteniamo $t = -\frac{5}{6}$. Infine la forma canonica della conica (ellisse reale) è

$$x^2 + 6y^2 - \frac{5}{6} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{6}{5}x^2 + \frac{36}{5}y^2 - 1 = 0$$

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & | & -1 \\ 2 & 5 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II - I} \begin{bmatrix} 2 & 2 & | & -1 \\ 0 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = -1 \\ 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{6} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad C\left(-\frac{7}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

Essendo un'ellisse, non ha punti all'infinito.

c) Per trovare gli assi di simmetria calcoliamo gli autospazi di A:

$$E(1) = N(A - I): \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle(-2, 1)\rangle$$

$$E(6) = N(A - 6I): \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow E(6) = \langle(1, 2)\rangle$$

Gli assi sono le rette passanti per il centro, di direzione parallela agli autovettori trovati:

$$a_1: \begin{cases} x = -\frac{7}{6} - 2t \\ y = \frac{2}{3} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{1}{6}$$

$$a_2: \begin{cases} x = -\frac{7}{6} + t \\ y = \frac{2}{3} + 2t \end{cases} \Rightarrow 2x - y = -3$$

□