CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

APPELLO DEL 31/08/2006 - FILA A

A.A. 2005/06

Esercizio 1.1. *Si considerino la retta r di equazione*

$$r \ : \ \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

e la famiglia di piani $\pi_k : \ 2x + ky - z = 1$ dove k è un parametro reale.

a) *Si determini per quali k il piano π_k risulta parallelo a r.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente calcolare la distanza tra π_k e r.*

Soluzione:

a) Un metodo consiste nel mettere a sistema retta e piano e stabilire per quali k il sistema non ammette soluzione:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \\ 2x + ky - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \\ (2 - 2k)t = 3k - 2 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile, e quindi r e π sono paralleli, se $k = 1$.

b) Consideriamo un punto di r, per esempio il punto $A(2, -3, 1)$, e sia s la retta passante per A e perpendicolare a π. Poichè la direzione ortogonale a π è $(2, 1, -1)$, l'equazione parametrica di s è:

$$s : \quad \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Il punto $B = s \cap \pi$ è dato da:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \\ 4 + 4t - 3 + t - 1 + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{6} \\ y = -\frac{17}{6} \\ z = \frac{5}{6} \\ t = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Quindi $B = s \cap \pi = \left(\frac{14}{6}, \ -\frac{17}{6}, \ \frac{1}{6}\right)$.

Infine

$$d(\pi, r) = d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$\square$

Esercizio 1.2. *Sia S il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ formato dai vettori v della forma*

$$v = (2a_1 + a_2, \ a_1 - a_3, \ a_1 + a_2 + a_3)$$

con a_1, a_2, a_3 parametri reali.

a) *Calcolare la dimensione di S.*
b) *Determinare una base di S.*

Soluzione:
Il generico vettore v di S è del tipo $v = (2,1,1)a_1 + (1,0,1)a_2 + (0,-1,1)a_3$. Quindi

$$S = \langle\ (2,1,1),\ (1,0,1),\ (0,-1,1)\ \rangle$$

Consideriamo la matrice A associata ai tre vettori

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine

$$\dim(S) = \mathrm{rg}(A) = 2 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}(S) = \{\ (2,1,1),\ (1,0,1)\ \}$$

□

Esercizio 1.3. *Sia S l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} -x_1 + (k-1)x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (k+1)x_3 + (k-1)x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + (2-2k)x_4 = k-2 \\ x_1 + 4x_2 + (2k-2)x_3 + (1-k)x_4 = 2-k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Stabilire per quali k l'insieme S è uno spazio vettoriale e in tali casi determinarne una base.*
b) *Esplicitare S al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Soluzione:
L'insieme S è uno spazio vettoriale quando si tratta delle soluzioni di un sistema omogeneo, quindi per $k = 2$. Per rispondere ad entrambe le domande effettuiamo comunque la riduzione a gradini per ogni valore di k.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & k-1 & 0 \\ -1 & 2 & k+1 & k-1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2-2k & k-2 \\ 1 & 4 & 2k+2 & 1-k & 2-k \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III + 2I \\ IV + I \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & k-2 \\ 0 & 4 & 2k+2 & 0 & 2-k \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - 2II \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-k \end{array}\right]$$

a) Abbiamo già osservato che S è uno spazio vettoriale se $k = 2$, nel quale caso le soluzioni sono

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow \quad S = \langle (1,0,0,1) \rangle$$

Infine per $k = 2$ una base di S è $\mathcal{B}(S) = \{(1,0,0,1)\}$.
b) Dalla matrice ridotta vediamo che il sistema ammette soluzione quando $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$, cioè quando $k = 2$. In tale caso abbiamo già trovato S al punto precedente: $S = \langle (1,0,0,1) \rangle$. Per $k \neq 2$ il sistema non ammette soluzioni, quindi $S = \emptyset$.

□

Esercizio 1.4. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2)$$

a) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro reale k.*
b) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (3,3,1,0)$ appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per rispondere alla domanda a) dobbiamo in sostanza calcolare il rango di A, mentre per rispondere alla domanda b) dobbiamo stabilire quando il sistema $A|v$ ammette soluzione. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|v$:

$$\begin{bmatrix} 2k & -1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ III \\ II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 2k & -1 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ \\ IV-2kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 0 & -1+2k & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III-II \\ 2IV-(2k-1)III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2k+1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2k-1 & | & -2k+7 \end{bmatrix}$$

Conviene forse interrompere la riduzione a questo punto.

a) $2k+1$ e $2k-1$ non possono essre contemporaneamente nulli, quindi la matrice A ha sempre rango 3:

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 3-3 = 0 \qquad \forall k \in \mathbf{R}$$

b) Il sistema $A|v$ ammette soluzione quando $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|v)$. Abbiamo appena visto che $\mathrm{rg}(A) = 3$, quindi il sistema ammette soluzione se anche $\mathrm{rg}(A|v) = 3$, cioè se $\det(A|v) = 0$. Calcoliamo quindi il determinante della matrice ridotta:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2k+1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2k-1 & | & -2k+7 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot [(2k+1)(-2k+7) - (2k-1)\cdot 5]$$
$$= 2 \cdot (-4k^2 + 2k + 12)$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado vediamo che il determinante si annulla per $k = -3, 4$.

Infine v appartiene all'immagine di T quando $k = -3, 4$.

In alternativa si poteva completare la riduzione a gradini di $A|v$.

□

Esercizio 1.5. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ 2x_2 + \sqrt{3}x_3,\ \sqrt{3}x_2)$$

a) *Stabilire se T è invertibile.*
b) *Mostrare che T è un endomorfismo simmetrico.*
c) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizza T.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

a) T è invertibile se è invertibile la matrice A, cioè se A ha determinante non nullo:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-3) = -6 \neq 0$$

b) La matrice associata a T rispetto alla base canonica (che è ortonormale) è simmetrica: $A^T = A$, quindi T è un endomorfismo simmetrico.

c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(-\lambda) - 3] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2,\ -1,\ 3$.

Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(2) = N(A-2I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}z = 0 \\ \sqrt{3}y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ E(2) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E(-1) = N(A+I): \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \sqrt{3}III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 3y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -\frac{3}{\sqrt{3}}t = -\sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow\ E(-1) = \langle (0,1,-\sqrt{3}) \rangle$$

$$E(3) = N(A-3I): \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + \sqrt{3}II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow\ E(3) = \langle (0,\sqrt{3},1) \rangle$$

Essendo tre autospazi distinti i tre autovalori generatori trovati sono tra loro ortogonali. Per ottenere la base ortonormale cercata basta quindi prendere i generatori di norma 1:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right) \right\}$$

□

Esercizio 1.6. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q}\ :\ x^2 + z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}z + 2y + 4 = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica.*

b) *Studiare la conica che si ottiene intersecando la quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ (tipo, forma canonica,...).*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadriica è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che A' ha due righe uguali, quindi $\det(A') = 0$ e si tratta di una quadrica degenere. Calcoliamo il rango di A':

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - I \\ IV - \sqrt{2}I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

quindi $\text{rg}(A') = 3$ e si tratta di una quadrica degenere irriducibile. Inoltre $\det(A) = 0$, quindi si tratta di un cilindro.

Per stabilire il tipo di cilindro dobbiamo calcolare gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^2(1-\lambda)$$

Quindi A ha autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 1$ e

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0$$

Si tratta infine di un cilindro parabolico.

b) Intersecando la quadrica con il piano $z = 0$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C} \;:\; x^2 + 2\sqrt{2}x + 2y + 4 = 0$$

Notiamo che l'equazione può essere riscritta nella forma (nota dalle superiori)

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x - 2$$

Si tratta quindi di una parabola con asse verticale di vertice $V(-\sqrt{2}, -1)$ e asse $x = -\sqrt{2}$.

In alternativa per calcolare asse e vertice possiamo studiare (complicando un po' le cose) le matrici associate alla conica.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det(A') = -1 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere. Inoltre $\det(A) = 0$ quindi si tratta di una parabola. Per calcolare asse e vertice dobbiamo calcolare gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda = 0, 1$. L'asse ha direzione parallela all'autovalore relativo a $\lambda = 0$. Calcoliamo quindi $E(0)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \; E(0) = \langle (0,1) \rangle$$

La direzione ortogonale all'asse è quindi $(1, 0)$ e una retta ortogonale all'asse è

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \; y = 0$$

Calcoliamo i punti D e E di intersezione di tale retta con la parabola e quindi il loro punto medio M:

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}$$

Quindi $x_M = -\sqrt{2}$ e $y_M = 0$. L'asse è quindi la retta di direzione $(0,1)$ passante per M:

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow \; x = -\sqrt{2}$$

Infine il vertice è dato dall'intersezione tra asse e parabola: $V(-\sqrt{2}, -1)$.

Sappiamo che la forma canonica di una parabola è del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo $\lambda_1 x^2 + 2ty = 0$. Sapendo che $\lambda_1 = 1$ la matrice associata a tale equazione è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = \pm 1$. Infine la forma canonica è $x^2 - 2y = 0$.

$\square$