# CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

## PROVA SCRITTA D'ESAME - 30/07/07 - FILA B

A.A. 2006/07

**Esercizio 1.1.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix}$$

*dove $k$ è un parametro reale.*

a) *Si calcoli il rango di $A$.*
b) *Si stabilsca per quali valori di $k$ il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice $A$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II-3/2II \\ III+1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k+1 \\ 0 & k+2 & 2k+4 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 \end{bmatrix}$$

a) La matrice $A$ ha rango 3 se $k \neq 1, -2$, ha rango 2 se $k = 1$ e ha rango 1 se $k = -2$.
b) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$ se la matrice dei coefficienti ha rango 3 nel qual caso $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ per ogni $b \in \mathbf{R}^3$, ovvero se $k \neq 1, -2$.

□

**Esercizio 1.2.** *Siano $r$ e $s$ le rette di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad s: \begin{cases} 3x-2y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

a) *Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi_1$ contenente $r$ e $s$.*
b) *Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi_2$ perpendicolare a $r$ e $s$ e passante per il punto $C(0,1,1)$.*

Soluzione:

a) L'equazione parametrica di $s$ è

$$s: \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

quindi $r$ e $s$ hanno entrambe direzione $(2,3,0)$ e sono parallele, quindi complanari. Per determinare un'altra direzione di $\pi_1$ consideriamo due qualsiasi punti di $r$ e $s$ e la direzione da essi individuata:

$$A(1,0,1) \in r, \qquad B\left(-\frac{2}{3}, 0, 2\right) \in s \;\Rightarrow\; AB = \left(-\frac{5}{3}, 0, 1\right) \;\Rightarrow\; (-5,0,3)$$

$\pi_1$ è quindi il piano di direzioni $(2,3,0)$ e $(-5,0,3)$ e passante per $A$:

$$\pi_1: \begin{cases} x = 1-5t+2s \\ y = 3s \\ z = 1+3t \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R}, \;\Rightarrow\; 3x-2y+5z = 8$$

b) $\pi_2$ ha direzione ortogonale a $(2,3,0)$ quindi equazione del tipo $2x+3y = d$. Imponendo il passaggio per $C$ otteniamo

$$\pi_2: \; 2x+3y = 3$$

□

**Esercizio 1.3.** *Sia $V = \langle A, B, C\rangle$ il sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la dimensione e una base di $V$.*
b) *Si esprima $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare della base trovata al punto* a).

Soluzione:

a) Per determinare la dimensione di $V$ cominciamo a verificare se $A, B$ e $C$ sono linearmente indipendenti risolvendo il sistema $xA + yB + zC = 0$:

$$x\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 2x+2y+2z & y+3z \\ x+3y+7z & 2x+4y+8z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+2y+2z = 0 \\ y+3z = 0 \\ x+3y+7z = 0 \\ 2x+4y+8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 3 & 7 & | & 0 \\ 2 & 4 & 8 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ \\ III-1/2I \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2II \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi il sistema $xA+yB+zC = 0$ ammette infinite soluzioni. Di conseguenza le tre matrici $A, B, C$ sono linearmente dipendenti e $\dim(V) < 3$. Dai conti appena svolti si vede inoltre che risolvendo l'equazione $xA + yB = 0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x+2y = 0 \\ y = 0 \\ x+3y = 0 \\ 2x+4y = 0 \end{cases}$$

che ammette la sola soluzione $x = y = 0$, quindi le matrici $A$ e $B$ sono linearmente indipendenti. Infine $\dim(V) = 2$ e una base di $V$ è data dall'insieme $\{A, B\}$.

b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xA + yB = D$. Procedendo come nel punto precedente otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x+2y = 2 \\ y = 2 \\ x+3y = 5 \\ 2x+4y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad D = -A + 2B$$

□

**Esercizio 1.4.** *Detto $k$ un paramtro reale, sia*

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}.$$

a) *Si trovino, al variare di $k$, nucleo e immagine dell'endomorfismo $T_A$ di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice $A$.*
b) *Stabilire per quali valori $k \in \mathbf{R}$ la funzione lineare $T_A$ è invertibile.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice $A$:

$$\begin{matrix} \\ \\ 2III-kII \end{matrix} \begin{bmatrix} k & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

– Se $k \neq 0$ la matrice ha rango 3, quindi $\mathrm{Im(T)} = \mathbf{R}^3$ e $\ker(T) = \{(0,0,0)\}$.

– Se $k = 0$ una base dell'immagine di $T$ è data dall'insieme $\{(1,2,0),\ (10,0,0)\}$. Per trovare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a $A$:

$$\begin{cases} y + 10z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi una base del nucleo di $T$ è $\{(1,0,0)\}$.

b) $T$ è invertibile se $A$ ha rango 3, quindi se $k \neq 0$.

□

**Esercizio 1.5.** *Considerare le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori e gli autovettori di $A$ e di $B$.*
b) *Stabilire se $A$ e $B$ sono simili.*
c) *Esistono valori di $t$ per cui $C$ e $B$ sono simili?*

Soluzione:

a) Il polinomio caratterestico di $A$ è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di $A$ sono $\lambda = 2$ doppio e $\lambda = 1$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E_A(1) = N(A - I) : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E_A(1) = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$E_A(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_A(2) = \langle (1,0,0) \rangle$$

Analogamente calcoliamo gli autovalori e gli autovettori di $B$:

$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di $B$ sono $\lambda = 2$ doppio e $\lambda = 1$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E_B(1) = N(B - I) : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_B(1) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E_B(2) = N(B - 2I) : \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E_B(2) = \langle (1,1,0),\ (0,0,1) \rangle$$

b) $A$ e $B$ non sono simili poiché $A$ non è diagonalizzabile mentre $B$ lo è.
c) Studiamo gli autovalori e la diagonalizzabilità di $C$:

$$p_C(\lambda) = (1-\lambda)(t-\lambda)(2-\lambda)$$

Condizione necessaria perché $B$ e $C$ siano simili è che abbiano gli stessi autovalori con la stessa molteplicità, quindi deve essere $t = 2$. Verifichiamo se per tale valore anche $C$ è diagonalizzabile.

$$E_C(2) = N(C - 2I) : \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t + s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E_C(2) = \langle (1,1,0),\ (1,0,1) \rangle$$

Infine per $t = 2$ le matrici $B$ e $C$ sono simili in quanto sono entrambe simili alla matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 1.6.** *Sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,2,0),\ v_2 = (2,4,-1)\}$.*

a) *Si trovi una base ortonormale di $V$ a partire da $\mathcal{B}$.*

b) *Si trovi una base ortonormale del complemento ortogonale $V^\perp$ di $V$.*

Soluzione:

a) Costruiamo prima una base $\{w_1,\ w_2\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$w_1 = v_1 = (1,2,0)$$

$$w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (2,4,-1) - \frac{10}{5}(1,2,0) = (0,0,-1)$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori $u_i$ paralleli a $w_i$, ma di norma 1:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \qquad u_2 = w_2 = (0,0,-1)$$

Infine una base ortonormale cercata è

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right),\ (0,0,-1)\right\}$$

b) Il complemento ortogonale di $V$ è l'insieme dei vettori di $\mathbf{R}^3$ che sono ortogonali ai vettori di $V$, e quindi ai vettori di una base di $V$:

$$V^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y = 0,\ 2x + 4y - z = 0\right\}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad V^\perp = \langle (-2,1,0) \rangle$$

Per trovare una base ortonormale è sufficiente prendere il generatore di norma 1:

$$\mathcal{B}\left(V^\perp\right) = \left\{\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)\right\} = \left\{\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)\right\}$$

□