II APPELLO D'ESAME - 14/07/2005 – A

A.A. 2004/05

Esercizio 0.1. *Siano* $v_1 = (-1, -2, 1, 1)$, $v_2 = (2, 7, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0, k+1)$, $w = (0, k, k, k^2 + k - 1)$, *dove* k *è un parametro reale.*

a) *Si calcoli la dimensione del sottospazio* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *al variare di* k.
b) *Si stabilisca per quali valori di* k $w \in V$.

Soluzione:
Per rispondere a intrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ -2 & 7 & 1 & | & k \\ 1 & 1 & 0 & | & k \\ 1 & 1 & k+1 & | & k^2+k-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + I \\ IV - III \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & k \\ 0 & 3 & 0 & | & k \\ 0 & 0 & k+1 & | & k^2-1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - II \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & | & k^2-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV + (k+1)III \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-1 \end{bmatrix}$$

a) Dalla matrice dei coefficienti otteniamo che $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 3 \quad \forall k \in \mathbf{R}$.
b) Il vettore w appartiene a V se il sistema ammette soluzioni, ovvero se la matrice completa e incompleta hanno lo stesso rango. Quindi $w \in V$ se $k^2 - 1 = 0$, cioè $k = \pm 1$.

□

Esercizio 0.2. *Sia* $V \subseteq \mathbf{R}^4$ *così definito:*

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + 2x_2 + (k+1)x_4 = 0, \ x_1 + x_2 - 2kx_3 = 0, \ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0\}$$

a) *Determinare per quale valore di* k *il vettore* $v = (-4, 2, 1, 1)$ *appartiene a* V.
b) *Per il valore di* k *trovato al punto precedente determinare una base di* V *e estendere tale base a una base di* $\mathbf{R}^4$.

Soluzione:

a) Per come è definito V, il vettore $v = (-4, 2, 1, 1)$ appartiene a V se:

$$\begin{cases} -4 + 2 \cdot 2 + (k+1) \cdot 1 = 0 \\ -4 + 2 - 2k \cdot 1 = 0 \\ 3 \cdot (-4) + 7 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k + 1 = 0 \\ -2 - 2k = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Quindi $v \in V$ se $k = -1$.

b) Per $k=1$ lo spazio V è lo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \\ 3x_1+7x_2-2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \mid & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ -x_2+2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-4t \\ x_2=2t \\ x_3=t \\ x_4=s \end{cases} \quad \forall s,t\in\mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(V)=\{\ (-4,2,1,0),\ (0,0,0,1)\ \}$$

Per estendere la base trovata a una base di $\mathbf{R}^4$ basta osservare che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 4. Quindi

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4)=\{\ (-4,2,1,0),\ (0,0,0,1),\ (1,0,0,0),\ (0,1,0,0)\ \}$$

$\square$

Esercizio 0.3. *Siano assegnate la matrici*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 2 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Discutere la dipendenza/indipendenza lineare di A, B, C al variare di k.*
b) *Esprime, quando possibile, D come combinazione lineare di A, B, C.*

Soluzione:
Per rispondere alla prima domanda dobbiamo risolvere l'equazione $xA+yB+zC=0$, ovvero

$$\begin{bmatrix} x+2y & -y+z \\ kz & x+2z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ -y+z=0 \\ kz=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

Analogamente per rispondere alla seconda domanda dobbiamo risolvere l'equazione $xA+yB+zC=D$, ovvero

$$\begin{bmatrix} x+2y & -y+z \\ kz & x+2z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ -y+z=0 \\ kz=1 \\ x+2z=1 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata al sistema non omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & 1 \\ 1 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Se $k \neq 0$ il sistema omogeneo ammette solo la soluzione $x = y = z = 0$, quindi A, B, C sono linearmente indipendenti. Se $k = 0$ il sistema omogeneo ammette infinite soluzioni e A, B, C sono linearmente dipendenti.

b) Il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -y + z = 0 \\ kz = 1 \end{cases}$$

ammette soluzione solo se $k \neq 0$. In questo caso otteniamo:

$$\left(1 - \frac{2}{k}\right) A + \frac{1}{k} B + \frac{1}{k} C = D$$

□

Esercizio 0.4. *Si consideri la funzione* $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definita da*

$$S(x_1, x_3, x_3) = (kx_1 + 2x_2, x_2 + x_3, x_1 - 2x_2 + x_3 - k^2 + 1)$$

a) *Trovare i valori di* k *per cui* S *è lineare.*

b) *Per i valori trovati in* a) *si determini una base del nucleo* $N(S)$ *e una base dell'immagine* $Im(S)$.

Soluzione:

a) Perché S sia lineare deve essere per esempio $S(0) = 0$. Nel nostro caso quindi

$$S(0, 0, 0) = (0, 0, -k^2 + 1) = (0, 0, 0) \ \Rightarrow k^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow \ k = \pm 1$$

b) Nel caso $k = 1$, l'applicazione S ha associata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$N(S) = \{(0, 0, 0)\}$$
$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{ \ (1, 1, 1), \ (2, 0, -2), \ (0, 1, 1) \ \}$$

Analogamente se $k = -1$, l'applicazione S ha associata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$N(S) = \{(0,0,0)\}$$
$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{\ (-1,1,1),\ (2,0,-2),\ (0,1,1)\ \}$$

□

Esercizio 0.5. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una funzione lineare e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove*

$$v_1 = (1,1,0), \quad v_2 = (1,0,0), \quad v_3 = (0,1,1).$$

Sapendo che v_1 genera il nucleo di T e che v_2 e v_3 sono autovettori di T relativi agli autovalori 2 e -1 rispettivamente:

a) *Mostrare che $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Calcolare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*
c) *Calcolare la matrice associata a T rispetto alla base canonica.*

SOLUZIONE:

a) La matrice associata ai tre vettori è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango tre, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Il fatto che il vettore v_1 generi il nucleo di T significa che v_1 è autovettore relativo all'autovalore 0. Conosciamo quindi tre autovalori e tre rispettivi autovettori di T, quindi rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ l'applicazione T ha matrice

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Ricaviamo l'azione di T sugli elementi della base canonica:

$$T(1,0,0) = T(v_2) = 2v_2 = (2,0,0)$$
$$T(0,1,0) = T(v_1) - T(v_2) = 0 - 2v_2 = (-2,0,0)$$
$$T(0,0,1) = T(v_3) - T(0,1,0) = -v_3 + 2v_2 = (2,-1,-1)$$

Quindi

$$M_{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 0.6. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione*

$$x^2 + 8xy + y^2 - 8x + 1 = 0$$

a) *Determinare le coordinate del centro di simmetria di $\mathcal{C}$.*
b) *Trovare la rototraslazione che trasforma l'equazione di $\mathcal{C}$ in forma canonica.*
c) *Scrivere coordinate omogenee dei punti all'infinito di $\mathcal{C}$.*

Soluzione:
Consiamo le matrici associate a $\mathcal{C}$:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $\det(A') \neq 0$ e $\det(A) < 0$ quindi si tratta di una iperbole non degenere.

a) Per trovare il centro C della conica risolviamo il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & | & -4 \\ 4 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II-4I} \begin{bmatrix} 1 & 4 & | & -4 \\ 0 & -15 & | & -16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{15} \\ y = \frac{16}{15} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{4}{15}, \frac{16}{15}\right)$$

b) Per trovare la rotazione necessaria calcoliamo gli autovettori di A.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 16 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 5,\; \lambda_2 = -3$$

Calcoliamo l'autospazio $E(5)$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & | & 0 \\ 4 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(5) = \langle (1,1) \rangle = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-3)$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & | & 0 \\ 4 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(-3) = \langle (-1,1) \rangle = \langle \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$$

Quindi la matrice di rotazione cercata è

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T A R = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Tale rotazione corrisponde al cambio di coordinate

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate la conica ha centro C':

$$C' = \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{12}{15} = \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{20}{15} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{cases}$$

Infine la rototraslazione che trasforma l'equazione di $\mathcal{C}$ in forma canonica corrisponde al cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ y'' = y' - \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) - \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{cases}$$

Lo stesso risultato lo potevamo ottenere effettuando prima la rotazione e poi procedendo con il completamento del quadrato.

c) Le coordinate omogenee dei punti all'infinito di $\mathcal{C}$ sono:

$$P_\infty = (-1, 1, 0) \qquad Q_\infty = (1, 1, 0)$$

$\square$