

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

GEOMETRIA – APPELLO DEL 28/6/2010 – A –

Esercizio 1.1. Si considerino il piano π_1 di equazione $x + y - 2z = 0$ e la retta r di equazione cartesiana

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

- Determinare un'equazione cartesiana del piano π_2 contenente r e il punto $A(1, 0, -1)$; determinare inoltre un'equazione parametrica della retta intersezione tra π_1 e π_2 .
- Determinare equazione parametrica e cartesiana del piano π_3 ortogonale a π_1 e π_2 passante per il punto $B(3, 1, 3)$.

SOLUZIONE:

La retta r ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

quindi due suoi punti sono per esempio $P(1, 1, 0)$ e $Q(1, 1, 1)$.

- Il piano π_2 passa per i punti A , P e Q . Poiché $\overrightarrow{AP} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1)$, il piano π_2 ha equazione parametrica

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = t + s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

e l'equazione cartesiana di π_2 è $x = 1$.

Per trovare la retta s intersezione di π_1 e π_2 risolviamo il sistema

$$s = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

- Il piano π_3 ortogonale a π_1 e π_2 è anche ortogonale a $s = \pi_1 \cap \pi_2$, quindi al vettore $(0, 2, 1)$. Di conseguenza π_3 è del tipo $2y + z = d$. Imponendo il passaggio per B , otteniamo $\pi_3 : 2y + z = 5$. □

Esercizio 1.2. Sia A la matrice reale $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Determinare tutte le matrici $M \in M_2(\mathbf{R})$ di tipo 2×2 tali che $MA = AM$.
- Mostrare che l'insieme S delle matrici trovate in a) forma un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbf{R})$ e calcolarne la dimensione.

SOLUZIONE:

- Sia $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ la generica matrice di $M \in M_2(\mathbf{R})$. Di conseguenza:

$$MA = \begin{bmatrix} -x - y & 2x + y \\ -z - w & 2z + w \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AM = \begin{bmatrix} -x + 2z & -y + 2w \\ -x + z & -y + w \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $MA = AM$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -x - y = -x + 2z \\ 2x + y = -y + 2w \\ -z - w = -x + z \\ 2z + w = -y + w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2z \\ 2x + 2y - 2w = 0 \\ x - 2z - w = 0 \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x + y - w = 0 \\ x + y - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + s \\ y = -2t \\ z = t \\ w = s \end{cases}$$

Quindi M è del tipo

$$M = \begin{bmatrix} 2t+s & -2t \\ t & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot s$$

- b) L'insieme S delle matrici che commutano con A è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbf{R})$ in quanto:
- è chiuso rispetto alla somma: se M_1 e M_2 appartengono a S , quindi commutano con A , allora

$$(M_1 + M_2)A = M_1A + M_2A = AM_1 + AM_2 = A(M_1 + M_2)$$

Di conseguenza anche $M_1 + M_2$ appartiene a S .

- è chiuso rispetto al prodotto per scalari: se M appartiene a S , quindi commuta con A , e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora

$$(\lambda M)A = \lambda(MA) = \lambda(AM) = A(\lambda M).$$

Di conseguenza anche λM appartiene a S .

La dimostrazione si poteva anche fare utilizzando la scrittura esplicita di M trovata al punto precedente.

Abbiamo trovato al punto a) che

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Poiché le due matrici $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti (non sono un multiplo dell'altra), l'insieme $\{C, I\}$ forma una base di S che di conseguenza ha dimensione 2. □

Esercizio 1.3. Si consideri l'insieme \mathcal{S} costituito dai seguenti vettori di \mathbf{R}^4

$$v_1 = (1, 2, 2, 1), v_2 = (3, -1, 1, 0), v_3 = (0, 1, 2, 1).$$

- a) È possibile estendere \mathcal{S} a una base di \mathbf{R}^4 ?
- b) In caso affermativo, trovare una base di \mathbf{R}^4 contenente \mathcal{S} .

SOLUZIONE:

- a) \mathcal{S} può essere esteso a una base di \mathbf{R}^4 se v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Per rispondere ad entrambe le domande, riduciamo a gradini la matrice A formata dai vettori colonna v_1, v_2 e v_3 affiancata, per semplicità, dalla matrice identica I_4 .

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{array}{l} II - 2I \\ III - II \\ 2IV - III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \\ 7III + 2II & \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} 9IV - III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -16 & 36 \end{array} \right] \end{aligned}$$

La matrice A ha rango 3, quindi i tre vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti e l'insieme \mathcal{S} può essere esteso ad una base di \mathbf{R}^4 .

- b) La matrice formata dalle prime tre colonne e da una qualsiasi delle ultime quattro, ha rango 4, quindi i vettori corrispondenti formano una base di \mathbf{R}^4 . Una base di \mathbf{R}^4 contenente \mathcal{S} è per esempio

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, e_1 = (1, 0, 0, 0)\}$$

□

Esercizio 1.4. Dati i vettori $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 2, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$, sia T l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 tale che $T(v_1) = v_2$, $T(v_2) = v_3$ e $T(v_3) = v_1$.

- a) Determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.
- b) Determinare la matrice associata a T rispetto alla base canonica.
- c) Determinare il nucleo di T e trovare (se esiste) una controimmagine di $(5, 1, -11)$.

SOLUZIONE:

a) Dalla definizione di T si ha

$$T(v_1) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_2) = v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_3) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$$

quindi la matrice associata a T rispetto a \mathcal{B} è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Senza la necessità di impostare un sistema è facile scrivere gli elementi della base canonica come combinazione lineare degli elementi della base \mathcal{B} e quindi trovarne l'immagine attraverso a T :

$$e_1 = v_1 - \frac{1}{2} v_2 \quad \Rightarrow \quad T(e_1) = T(v_1) - \frac{1}{2} T(v_2) = v_2 - \frac{1}{2} v_3 = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$e_2 = \frac{1}{2} v_2 \quad \Rightarrow \quad T(e_2) = \frac{1}{2} T(v_2) = \frac{1}{2} v_3 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$e_3 = v_3 - \frac{1}{2} v_2 \quad \Rightarrow \quad T(e_3) = T(v_3) - \frac{1}{2} T(v_2) = v_1 - \frac{1}{2} v_3 = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c) È immediato verificare che $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)) = 1$, quindi $\text{rg}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)) = \text{rg}(M(T)) = 3$. Di conseguenza $\dim(N(T)) = 0$ e $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$.

T è suriettiva, quindi esiste una controimmagine per ogni elemento di \mathbf{R}^3 . Per trovare una controimmagine di $v = (3, 7, -14)$ ci conviene forse usare la matrice $M(T)$ risolvendo il sistema $M(T)|v$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2III \\ 2II \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & -28 \\ 3 & 1 & 1 & | & 14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow II + 3I \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & -28 \\ 0 & 4 & -2 & | & -70 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = -28 \\ 2y - z = -35 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -16 \\ z = 3 \end{cases}$$

Quindi $T(9, -16, 3) = (3, 7, -14)$ e la controimmagine di v è $(9, -16, 3)$.

□

Esercizio 1.5. Sia T l'endomorfismo di \mathbf{R}^4 definito dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Stabilire se T è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 (2 - \lambda)^2$$

Risolvendo l'equazione $p_A(\lambda) = 0$ troviamo che T ha come autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, entrambi con molteplicità algebrica 2. Per stabilire se T è diagonalizzabile bisogna determinare la molteplicità geometrica

di entrambi gli autolvalori.

$$E(1) = N(A - I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} II \\ III + 2II \\ IV - III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A - I) = 2$ e $\dim(E(1)) = \dim(N(A - I)) = 4 - 2 = 2$; di conseguenza la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$ è 2.

$$E(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} II + I \\ III - 2I \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Iv + II \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A - 2I) = 2$ e $\dim(E(2)) = \dim(N(A - 2I)) = 4 - 2 = 2$; di conseguenza anche la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 2.

Poiché entrambi gli autovalori hanno molteplicità geometrica 2, l'endomorfismo T è diagonalizzabile. □

Esercizio 1.6. Si considerino i seguenti vettori di \mathbf{R}^4 :

$$v_1 = (1, 0, -1, 0), \quad v_2 = (2, 2, -1, t) \quad (t \text{ parametro reale}).$$

- Si determini il valore di t tale che v_1 e v_2 formino un angolo di 45° .
- Posto $t = 0$ si determini la proiezione di v_2 su v_1 .
- Posto $t = 0$ e dato $v_3 = (0, 0, 1, 1)$, si determini una base ortonormale dello spazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

SOLUZIONE:

- a) Sia ϑ l'angolo formato da v_1 e v_2 . Si ha

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9 + t^2}}$$

Poiché $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ otteniamo l'equazione

$$\frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{9 + t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{9 + t^2}} = 1 \Rightarrow 3 = \sqrt{9 + t^2} \Rightarrow 9 = 9 + t^2 \Rightarrow t = 0$$

Quindi v_1 e v_2 formano un angolo di 45° se $t = 0$.

- b) La proiezione di v_2 su v_1 è

$$\text{pr}_{v_1}(v_2) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_1, v_1)} \cdot v_1 = \frac{3}{2} \cdot (1, 0, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

- c) Cerchiamo prima una base ortogonale w_1, w_2, w_3 .

$$w_1 = v_1 = (1, 0, -1, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \text{pr}_{w_1}(v_2) = (2, 2, -1, 0) - \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow w_2 = (1, 4, 1, 0)$$

$$w_3 = v_3 - \text{pr}_{w_1}(v_3) - \text{pr}_{w_2}(v_3) = (0, 0, 1, 1) - \frac{-1}{2} (1, 0, -1, 0) - \frac{1}{18} (1, 4, 1, 0) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 1\right) \Rightarrow$$

$$w_3 = (4, -2, 4, 9)$$

Per trovare una base ortonormale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di V si tratta ora di determinare i generatori di norma 1:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0) \\u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{18}}(1, 4, 1, 0) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, 4, 1, 0) \\u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{117}}(4, -2, 4, 9)\end{aligned}$$

□