

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA**

GEOMETRIA – APPELLO DEL 28/6/2010 – A –

**Esercizio 1.1.** Si considerino il piano  $\pi_1$  di equazione  $x + y - 2z = 0$  e la retta  $r$  di equazione cartesiana

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

- a) Determinare un'equazione cartesiana del piano  $\pi_2$  contenente  $r$  e il punto  $A(1, 0, -1)$ ; determinare inoltre un'equazione parametrica della retta intersezione tra  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .
- b) Determinare equazione parametrica e cartesiana del piano  $\pi_3$  ortogonale a  $\pi_1$  e  $\pi_2$  passante per il punto  $B(3, 1, 3)$ .

SOLUZIONE:

La retta  $r$  ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

quindi due suoi punti sono per esempio  $P(1, 1, 0)$  e  $Q(1, 1, 1)$ .

- a) Il piano  $\pi_2$  passa per i punti  $A$ ,  $P$  e  $Q$ . Poiché  $\overrightarrow{AP} = (0, 1, 1)$  e  $\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1)$ , il piano  $\pi_2$  ha equazione parametrica

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = t + s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

e l'equazione cartesiana di  $\pi_2$  è  $x = 1$ .

Per trovare la retta  $s$  intersezione di  $\pi_1$  e  $\pi_2$  risolviamo il sistema

$$s = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

- b) Il piano  $\pi_3$  ortogonale a  $\pi_1$  e  $\pi_2$  è anche ortogonale a  $s = \pi_1 \cap \pi_2$ , quindi al vettore  $(0, 2, 1)$ . Di conseguenza  $\pi_3$  è del tipo  $2y + z = d$ . Imponendo il passaggio per  $B$ , otteniamo  $\pi_3 : 2y + z = 5$ . □

**Esercizio 1.2.** Sia  $A$  la matrice reale  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

- a) Determinare tutte le matrici  $M \in M_2(\mathbf{R})$  di tipo  $2 \times 2$  tali che  $MA = AM$ .
- b) Mostrare che l'insieme  $S$  delle matrici trovate in a) forma un sottospazio vettoriale di  $M_2(\mathbf{R})$  e calcolarne la dimensione.

SOLUZIONE:

- a) Sia  $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$  la generica matrice di  $M \in M_2(\mathbf{R})$ . Di conseguenza:

$$MA = \begin{bmatrix} -x - y & 2x + y \\ -z - w & 2z + w \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AM = \begin{bmatrix} -x + 2z & -y + 2w \\ -x + z & -y + w \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione  $MA = AM$  otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -x - y = -x + 2z \\ 2x + y = -y + 2w \\ -z - w = -x + z \\ 2z + w = -y + w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2z \\ 2x + 2y - 2w = 0 \\ x - 2z - w = 0 \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x + y - w = 0 \\ x + y - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + s \\ y = -2t \\ z = t \\ w = s \end{cases}$$

Quindi  $M$  è del tipo

$$M = \begin{bmatrix} 2t+s & -2t \\ t & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot s$$

- b) L'insieme  $S$  delle matrici che commutano con  $A$  è un sottospazio vettoriale di  $M_2(\mathbf{R})$  in quanto:
- è chiuso rispetto alla somma: se  $M_1$  e  $M_2$  appartengono a  $S$ , quindi commutano con  $A$ , allora

$$(M_1 + M_2)A = M_1A + M_2A = AM_1 + AM_2 = A(M_1 + M_2)$$

Di conseguenza anche  $M_1 + M_2$  appartiene a  $S$ .

- è chiuso rispetto al prodotto per scalari: se  $M$  appartiene a  $S$ , quindi commuta con  $A$ , e  $\lambda \in \mathbf{R}$ , allora

$$(\lambda M)A = \lambda(MA) = \lambda(AM) = A(\lambda M).$$

Di conseguenza anche  $\lambda M$  appartiene a  $S$ .

La dimostrazione si poteva anche fare utilizzando la scrittura esplicita di  $M$  trovata al punto precedente.

Abbiamo trovato al punto a) che

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Poiché le due matrici  $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  sono linearmente indipendenti (non sono un multiplo dell'altra), l'insieme  $\{C, I\}$  forma una base di  $S$  che di conseguenza ha dimensione 2. □

**Esercizio 1.3.** Si consideri l'insieme  $\mathcal{S}$  costituito dai seguenti vettori di  $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (1, 2, 2, 1), v_2 = (3, -1, 1, 0), v_3 = (0, 1, 2, 1).$$

- a) È possibile estendere  $\mathcal{S}$  a una base di  $\mathbf{R}^4$ ?  
 b) In caso affermativo, trovare una base di  $\mathbf{R}^4$  contenente  $\mathcal{S}$ .

SOLUZIONE:

- a)  $\mathcal{S}$  può essere esteso a una base di  $\mathbf{R}^4$  se  $v_1, v_2$  e  $v_3$  sono linearmente indipendenti. Per rispondere ad entrambe le domande, riduciamo a gradini la matrice  $A$  formata dai vettori colonna  $v_1, v_2$  e  $v_3$  affiancata, per semplicità, dalla matrice identica  $I_4$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} II - 2I \\ III - II \\ 2IV - III \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \\ & \begin{array}{l} 7III + 2II \\ 2IV + III \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} 9IV - III \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -16 & 36 \end{array} \right] \end{aligned}$$

La matrice  $A$  ha rango 3, quindi i tre vettori  $v_1, v_2$  e  $v_3$  sono linearmente indipendenti e l'insieme  $\mathcal{S}$  può essere esteso ad una base di  $\mathbf{R}^4$ .

- b) La matrice formata dalle prime tre colonne e da una qualsiasi delle ultime quattro, ha rango 4, quindi i vettori corrispondenti formano una base di  $\mathbf{R}^4$ . Una base di  $\mathbf{R}^4$  contenente  $\mathcal{S}$  è per esempio

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, e_1 = (1, 0, 0, 0)\}$$

□

**Esercizio 1.4.** Dati i vettori  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 2, 0)$  e  $v_3 = (0, 1, 1)$ , sia  $T$  l'endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$  tale che  $T(v_1) = v_2$ ,  $T(v_2) = v_3$  e  $T(v_3) = v_1$ .

- a) Determinare la matrice associata a  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ .  
 b) Determinare la matrice associata a  $T$  rispetto alla base canonica.  
 c) Determinare il nucleo di  $T$  e trovare (se esiste) una controimmagine di  $(5, 1, -11)$ .

SOLUZIONE:

a) Dalla definizione di  $T$  si ha

$$T(v_1) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_2) = v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_3) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$$

quindi la matrice associata a  $T$  rispetto a  $\mathcal{B}$  è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Senza la necessità di impostare un sistema è facile scrivere gli elementi della base canonica come combinazione lineare degli elementi della base  $\mathcal{B}$  e quindi trovarne l'immagine attraverso a  $T$ :

$$e_1 = v_1 - \frac{1}{2} v_2 \quad \Rightarrow \quad T(e_1) = T(v_1) - \frac{1}{2} T(v_2) = v_2 - \frac{1}{2} v_3 = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$e_2 = \frac{1}{2} v_2 \quad \Rightarrow \quad T(e_2) = \frac{1}{2} T(v_2) = \frac{1}{2} v_3 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$e_3 = v_3 - \frac{1}{2} v_2 \quad \Rightarrow \quad T(e_3) = T(v_3) - \frac{1}{2} T(v_2) = v_1 - \frac{1}{2} v_3 = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Quindi la matrice associata a  $T$  rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c) È immediato verificare che  $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)) = 1$ , quindi  $\text{rg}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)) = \text{rg}(M(T)) = 3$ . Di conseguenza  $\dim(N(T)) = 0$  e  $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$ .

$T$  è suriettiva, quindi esiste una controimmagine per ogni elemento di  $\mathbf{R}^3$ . Per trovare una controimmagine di  $v = (3, 7, -14)$  ci conviene forse usare la matrice  $M(T)$  risolvendo il sistema  $M(T)|v$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2III \\ 2II \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & -28 \\ 3 & 1 & 1 & | & 14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow II + 3I \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & -28 \\ 0 & 4 & -2 & | & -70 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = -28 \\ 2y - z = -35 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -16 \\ z = 3 \end{cases}$$

Quindi  $T(9, -16, 3) = (3, 7, -14)$  e la controimmagine di  $v$  è  $(9, -16, 3)$ .

□

**Esercizio 1.5.** Sia  $T$  l'endomorfismo di  $\mathbf{R}^4$  definito dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Stabilire se  $T$  è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

Il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 (2 - \lambda)^2$$

Risolvendo l'equazione  $p_A(\lambda) = 0$  troviamo che  $T$  ha come autovalori  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$ , entrambi con molteplicità algebrica 2. Per stabilire se  $T$  è diagonalizzabile bisogna determinare la molteplicità geometrica

di entrambi gli autolvalori.

$$E(1) = N(A - I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} II \\ III + 2II \\ IV - III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi  $\text{rg}(A - I) = 2$  e  $\dim(E(1)) = \dim(N(A - I)) = 4 - 2 = 2$ ; di conseguenza la molteplicità geometrica di  $\lambda = 1$  è 2.

$$E(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} II + I \\ III - 2I \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Iv + II \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi  $\text{rg}(A - 2I) = 2$  e  $\dim(E(2)) = \dim(N(A - 2I)) = 4 - 2 = 2$ ; di conseguenza anche la molteplicità geometrica di  $\lambda = 2$  è 2.

Poiché entrambi gli autovalori hanno molteplicità geometrica 2, l'endomorfismo  $T$  è diagonalizzabile. □

**Esercizio 1.6.** Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbf{R}^4$ :

$$v_1 = (1, 0, -1, 0), \quad v_2 = (2, 2, -1, t) \quad (t \text{ parametro reale}).$$

- Si determini il valore di  $t$  tale che  $v_1$  e  $v_2$  formino un angolo di  $45^\circ$ .
- Posto  $t = 0$  si determini la proiezione di  $v_2$  su  $v_1$ .
- Posto  $t = 0$  e dato  $v_3 = (0, 0, 1, 1)$ , si determini una base ortonormale dello spazio  $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ .

SOLUZIONE:

- a) Sia  $\vartheta$  l'angolo formato da  $v_1$  e  $v_2$ . Si ha

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9 + t^2}}$$

Poiché  $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  otteniamo l'equazione

$$\frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{9 + t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{9 + t^2}} = 1 \Rightarrow 3 = \sqrt{9 + t^2} \Rightarrow 9 = 9 + t^2 \Rightarrow t = 0$$

Quindi  $v_1$  e  $v_2$  formano un angolo di  $45^\circ$  se  $t = 0$ .

- b) La proiezione di  $v_2$  su  $v_1$  è

$$\text{pr}_{v_1}(v_2) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_1, v_1)} \cdot v_1 = \frac{3}{2} \cdot (1, 0, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

- c) Cerchiamo prima una base ortogonale  $w_1, w_2, w_3$ .

$$w_1 = v_1 = (1, 0, -1, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \text{pr}_{w_1}(v_2) = (2, 2, -1, 0) - \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow w_2 = (1, 4, 1, 0)$$

$$w_3 = v_3 - \text{pr}_{w_1}(v_3) - \text{pr}_{w_2}(v_3) = (0, 0, 1, 1) - \frac{-1}{2} (1, 0, -1, 0) - \frac{1}{18} (1, 4, 1, 0) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 1\right) \Rightarrow$$

$$w_3 = (4, -2, 4, 9)$$

Per trovare una base ortonormale  $\{u_1, u_2, u_3\}$  di  $V$  si tratta ora di determinare i generatori di norma 1:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0) \\u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{18}}(1, 4, 1, 0) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, 4, 1, 0) \\u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{117}}(4, -2, 4, 9)\end{aligned}$$

□