CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

APPELLO D'ESAME DEL 24/06/2008, FILA A – GEOMETRIA 2007/08

Esercizio 0.1. *Si considerino le matrici (dove k è un parametro reale)*

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca il rango di A al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.*

SOLUZIONE:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$. Scambiamo la prima e quarta colonna di A e ricordando poi tale scambio prima di rispondere alla domanda b).

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6k & | & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4k+1 & | & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II-1/2I \\ III+1/2I \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ IV-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Anche senza completare la riduzione siamo in grado di risponedere ad entrambe le domande.

a) La matrice A ha rango 3 per ogni valore di k, infatti i due termini $k-1$ e $k+2$ non si possono annullare contemporaneamente.
b) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione se anche $rg(A|b) = 3$, cioè se $k = 1$ quando, ricordando lo scambio di colonne, otteniamo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w + 2y - z + 3x = \\ 2y + 2x = 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = t \\ w = -\frac{4}{3} + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Infine le soluzioni del sistema sono gli elementi dell'insieme

$$\left\{ (x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{4}{3} \right) + (0, 0, 1, 1)t \mid t \in \mathbf{R} \right\}.$$

□

Esercizio 0.2. *Siano assegnati il punto $A = (1, 2, 1)$ il piano π e la retta s di equazioni*

$$\pi : \ x + z = 4, \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) *Si determini il punto B, proiezione ortogonale di A su π e la retta r passante per A e per B.*
b) *Indicato con C il punto di intersezione tra s e r e con D il punto di intersezione tra s e π, si determini un'equazione della retta CD.*
c) *Si determini l'angolo tra r e la retta CD.*

SOLUZIONE:

a) Per trovare B determiniamo l'equazione della retta r passante per A e ortogonale a π, cioè di direzione $(1, 0, 1)$:

$$r : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Il punto B è dato dall'intersezione tra r e π:

$$B: \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 1+s \\ x+z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 1+s \\ 1+s+1+s = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad B = (2,2,2)$$

Notiamo che la retta passante per A e B richiesta è la retta r precedentemente trovata.

b) Calcoliamo le intersezioni:

$$C = r \cap s: \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 1+s \\ x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 1+s \\ 1+s = 1+t \\ 2 = 2 \\ 1+s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -1 \\ t = -1 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = (0,2,0)$$

$$D = s \cap \pi: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ x+z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ 1+t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ x = 4 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D = (4,2,0)$$

c) La retta r è parallela al vettore $u = (1,0,1)$ e la retta CD è parallela al vettore $v = (4,0,0)$. Indicato con ϑ l'angolo tra le due rette si ottiene:

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u,v)}{|u|\cdot|v|} = \frac{4}{\sqrt{2}\cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

□

Esercizio 0.3. *Sia $V = \langle A,\ B,\ C\rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & k-2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini la dimensione e una base di V.*

b) *Si stabilisca per quali k la matrice D appartiene a V. In tali casi si esprima D come combianzione lineare della base trovata al punto precedente.*

Soluzione:

a) Per determinare la dimensione e una base di V bisogna stabilire quante e quali tra le matrici A, B e C sono linearmente indipendenti, ovvero risolvere l'equazione $xA + yB + zC = 0$. Tale equazione si traduce nel seguente sistema

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ x + 4y + 9z = 0 \\ 2x + 4y + 10z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 4 & 9 & | & 0 \\ 2 & 4 & 10 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - I \\ IV - 1/2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 8 & | & 0 \\ 0 & 4 & 8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ 1/4II \\ III - II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Il sistema $xA + yB + zC = 0$ ammette infinite soluzioni, quindi le tre matrici sono linearmente dipendenti. Viceversa, risolvendo il sistema $xA + yB = 0$ otteniamo ol sistema equivalente

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = y = 0$$

quindi A e B sono linearmente indipendenti. Infine

$$\dim(V) = 2, \qquad \mathcal{B}(V) = \{A, B\}.$$

b) Per esprimere D come combinazione lineare della base trovata dobbiamo risolvere l'equazione $xA + yB = D$. Ripercorrendo i conti fatti precedentemente, otteniamo:

$$\begin{cases} 2x = 6 \\ x + 4y = k - 2 \\ 2x + 4y = 2 \\ x = k + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & | & 6 \\ 1 & 4 & | & k-2 \\ 2 & 4 & | & 2 \\ 1 & 0 & | & k+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - I \\ IV - 1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 4 & | & k-5 \\ 0 & 4 & | & -4 \\ 0 & 0 & | & k-1 \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette soluzione solo se $k = 1$, quando otteniamo

$$\begin{cases} x = 3 \\ 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad D = 3A - B \quad \text{se } k = 1.$$

Se $k \neq 1$ la matrice D non appartiene a V.

□

Esercizio 0.4. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) *Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T.*

b) *Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.*

Soluzione:

a) La matrice associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per risponedere alla domanda b) dobbiamo determinare risolvere il sistema $A \cdot (x, y, z)^T = (3, 3, k)^T$; riduciamo quindi direttamente a gardini la matrice A affiancata dalla colonna $(3, 3, k)^T$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ -2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow II + I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \quad III - II \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-6 \end{bmatrix}$$

Considerando la matrice A otteniamo che una base dell'immagine di T è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im(T)}) = \{(2, -2, 0),\ (0, 1, 1)\}$$

Risolvendo il sistema $Ax = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\ker(T)) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -2, 1 \right) \right\}$$

b) T non è iniettiva in quanto il nucleo di T ha dimensione 1.

Risolviamo il sistema $Ax = (3, 3, k)^T$. Il sistema ha soluzione solo se $k = 6$ quando otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 3 \\ y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 6 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Infine $(3, 3, k)$ appartiene all'imangine di T solo se $k = 6$. In tale caso i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$ sono i vettori del tipo $v = \left(\frac{3}{2}, 6, 0 \right) + \left(-\frac{1}{2}, -2, 1 \right) t, \ \forall t \in R$.

□

Esercizio 0.5. *Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$*

$$A = M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Trovare gli autovalori (reali) di S.*

b) *Trovare gli autovettori di S e stabilire se S è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Gli autovalori di T non dipendono dalla base, quindi possiamo lavorare sulla matrice A:
$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda + 49)$$
Quindi S ha due autovalori: $\lambda = 1$ e $\lambda = 7$.

b) Trovare gli autovettori di S possiamo comunque lavorare sulla matrice A ricordando però che i vettori trovati saranno espressi rispetto alla base $\mathcal{B}$:
$$E(1) = N(A - I): \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & 5 & -5 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II - 1/2I \\ 1/3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 9 & -9 & | & 0 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/9II \\ 1/6III + 1/9II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$
Quindi l'autospazio $E(1)$ è generato dal vettore $(0,1,1)_{\mathcal{B}}$, cioè dal vettore $v_2 + v_3 = (2,2,1)$. Infine $E(1) = \langle (2,2,1) \rangle$.

Analogamente:
$$E(7) = N(A - 7I): \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & -5 & | & 0 \\ 3 & -3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II + 1/2I \\ 1/3III + 1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$
Quindi l'autospazio $E(7)$ è generato dal vettore $(1,1,0)_{\mathcal{B}}$, cioè dal vettore $v_1 + v_2 = (2,1,0)$. Infine $E(7) = \langle (2,1,0) \rangle$.

S non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 7$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

□

Esercizio 0.6. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*
$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0.$$

a) *Si determini il tipo di conica.*
b) *Si trovi la forma canonica della conica.*
c) *Si trovino gli eventuali assi di simmetria della conica.*

Soluzione:

a) Le matrici associate alla conica sono:
$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$
Notiamo che $I_3 = \det(A') = -4 \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre $I_2 = \det(A) = 0$, quindi è una parabola.

b) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$, quindi A ha autovalori: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. La forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo
$$\lambda x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$
a cui è associata la matrice
$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$
Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:
$$-4 = -5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{4}{5\sqrt{5}} y = 0$$

c) Calcoliamo la direzione dell'asse ricordando che questo è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo.

Calcoliamo quindi l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II-2I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle(-2, 1)\rangle$$

Ora che abbiamo la direzione dell'asse dobbiamo determinarne un punto per potere scrivere l'equazione.

Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1, 2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti D e E, allora il punto medio M del segmento DE sarà un punto dell'asse. Senza tenere k variabile assegnamo a k un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 + 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D = (0, 0), \quad E = \left(-\frac{8}{25}, -\frac{16}{25}\right)$$

Infine il punto medio M del segmento DE è $M = \left(-\frac{4}{25}, -\frac{8}{25}\right)$.

L'asse è la retta per M parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{25} - 2t \\ y = -\frac{8}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = -\frac{4}{5} \Rightarrow 5x + 10y = -4$$

$\square$