CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

PROVA SCRITTA D'ESAME - 27/06/07 - FILA A

A.A. 2006/07

Esercizio 1.1. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Indicare basi per lo spazio delle righe e per lo spazio delle colonne di A.*
b) *Esistono valori $t \in \mathbf{R}$ per cui il sistema $Ax = b$, con $b = (1, 1, t, t)$ ammetta soluzione?*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ -1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & -3 & | & t \\ 0 & 1 & 1 & | & t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-2I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & t-2 \\ 0 & 1 & 1 & | & t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & t-4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

A questo punto della riduzione siamo già in grado di rispondere alle domande.

a) La matrice A ha rango due, inoltre

$$\mathcal{B}(\text{spazio delle colonne}) = \{(1, -1, 2, 0),\ (0, 1, 1, 1)\}$$
$$\mathcal{B}(\text{spazio delle righe}) = \{(1, 0, -2),\ (-1, 1, 3)\}$$

b) La matrice $A|b$ ha rango 3 per ogni valore di t, quindi il sistema $Ax = b$ non ammette mai soluzione.

□

Esercizio 1.2. *Siano π_1 il piano di equazioni parametriche:*

$$x = 1 + u + v, \quad y = 2 + u - v, \quad z = 3 + u, \qquad u, v \in \mathbf{R}$$

e π_2 il piano di equazione cartesiana $x - y + z + 1 = 0$.

a) *Si scriva l'equazione cartesiana di π_1.*
b) *Si scrivano le equazioni parametriche della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*
c) *Detta s la retta di equazioni parametriche: $x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = 3 + 2t$, si verifichi che r e s sono sghembe.*

Soluzione:

a) L'equazione cartesiana di π_1 è $x + y - 2z = -3$.
c) Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow_{II+I} \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x = s \\ y = 5 + 3s \\ z = 4 + 2s \end{cases}$$

c) r è parallela a $(1, 3, 2)$, mentre s è parallela a $(1, -1, 2)$, quindi le due rette non sono parallele. Per stabilire se sono secanti risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 1 + t = s \\ 2 - t = 5 + 3s \\ 3 + 2t = 4 + 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + t = s \\ 2 - t = 5 + 3 + 3t \\ 3 + 2t = 4 + 2 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + t = s \\ 4t = -6 \\ 3 = 6 \end{cases}$$

Poiché l'ultima equazione è impossibile il sistema non ha soluzione e le rette sono sghembe.

□

Esercizio 1.3. *Si consideri il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori*

$$v_1 = (-1, 1, 2, 1, 0),\ v_2 = (0, 2, 1, 1, 0),\ v_3 = (1, 1, -1, 0, 0).$$

a) *Trovare una base di V.*

b) *Determinare le coordinate del vettore* $v = (-2, 6, 6, 4, 0) \in V$ *rispetto alla base trovata al punto* a).

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 affiancata dal vettore v per rispondere a entrambe le domande.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ II + I \\ \Rightarrow III + 2I \\ IV + I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 1/2II \\ \Rightarrow 2III - II \\ IV - III \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il rango di A è 2 e una base di V è $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 = v$. Abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata a tale equazione (basta ignorare la terza colonna relativa a v_3). quindi

$$\begin{cases} -x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \ v = 2v_1 + 2v_2, \qquad v = (2, 2)_{\mathcal{B}}$$

□

Esercizio 1.4. *Sia* $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (0, 0, 2)\}$ *una base di* $\mathbf{R}^3$ *e sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'endomorfismo definito dalla matrice*

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la matrice associata a* T *rispetto alla base canonica di* $\mathbf{R}^3$.

b) *Si stabilisca se* T *è iniettivo e/o suriettivo.*

Soluzione:

a) Per utilizzare la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ dobbiamo esprimere gli elementi della base canonica rispetto a $\mathcal{B}$. Si ricava facilmente che

$$\begin{aligned} e_1 &= v_2 + \frac{1}{2}v_3 = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} \\ e_2 &= \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)_{\mathcal{B}} \\ e_3 &= \frac{1}{2}v_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Quindi

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = (5, 0, 10)_{\mathcal{B}} = 5v_1 + 10v_3 = (5, 10, 35)$$

$$T(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4, 3, -8)_{\mathcal{B}} = -4v_1 + 3v_2 - 8v_3 = (-1, -8, -31)$$

$$T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (1, 0, 2)_{\mathcal{B}} = v_1 + 2v_3 = (1, 2, 7)$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 10 & -8 & 2 \\ 35 & -31 & 7 \end{bmatrix}$$

b) Possiamo usare indifferentemente la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ o la matrice A. Per comodità di calcoli usiamo la matrice iniziale. $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha due righe uno multiplo dell'altra e $\text{rg}(M_{\mathcal{B}}(T)) = 2$. Quindi $\dim(\text{Im(T)}) = 2$ e T non è suriettivo, e $\dim(\ker(T)) = 1$ e T non è iniettivo.

□

Esercizio 1.5. *Data la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si discuta la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Per $k = 2$, si determini una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di M.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratterestico di M è

$$p_M(\lambda) = (1-\lambda)(k-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ k$ e dobbiamo discutere i valori di k.

– Se $k \neq 1, 2, 3$ i quattro autovalori sono distinti e singoli, quindi M è diagonalizzabile.

– Se $k = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè $\text{rg}(M - I) = 3$, $\dim(E(1)) = 1$ e M non è diagonalizzabile.

– Se $k = 2$ l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(2) = N(M - 2I) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + 4z - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = s \\ z = t \\ w = 2s + 4t \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (-1, 0, 1, 4),\ (0, 1, 0, 2) \rangle$$

Poiché $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 e gli altri autovalori sono singoli, per $k = 2$ la matrice M è diagonalizzabile.

– Se $k = 3$ l'autovalore $\lambda = 3$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Poichè $\text{rg}(M - 3I) = 3$, $\dim(E(3)) = 1$ e M non è diagonalizzabile.

b) Per $k = 2$ abbiamo già determinato $E(2)$. Calcoliamo gli altri due autospazi:

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle (0, 0, 0, 1) \rangle$$

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + I \\ IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y + 4z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle (2, 2, 0, 1) \rangle$$

Infine una delle basi cercate è

$$\mathcal{B} = \{\ (-1, 0, 1, 4),\ (0, 1, 0, 2),\ (0, 0, 0, 1),\ (2, 2, 0, 1)\}$$

□

Esercizio 1.6. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare autovalori e autovettori di A.*
b) *Calcolare una matrice diagonalizzante di A, che sia ortogonale e rappresenti una rotazione dello spazio attorno all'origine.*
c) *Scrivere la forma canonica della conica $\mathcal{C}$ con matrice associata A*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = -1, 1, 3$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle (0,1,1) \rangle$$

$$E(-1) = N(M + I) : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(-1) = \langle (0,-1,1) \rangle$$

b) Gli autovettori trovati, essendo relativi a autovalori distinti, sono già ortogonali tra loro. E' quindi sufficiente renderli di norma 1 per ottenere la matrice diagonalizzante ortogonale di rotazione:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c) $\det(A) = -3$, quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre l'autovalore della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ associata alla forma quadratica è $\lambda = 1$ doppio. Si tratta quindi di un'ellisse e cerchiamo un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + t = 0$ a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $\det(A) = \det(B)$ otteniamo $t = -3$. Infine la forma canonica della conica (ellisse reale) è

$$x^2 + y^2 - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 1 = 0$$

Notiamo che si tratta in realtà di una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{3}$.

□