CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

APPELLO DEL 22/06/06 - FILA A

A.A. 2005/06

Esercizio 1.1. *Si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni*

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad\qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

a) *Si mostri che le due rette sono incidenti.*
b) *Si determini l'equazione della retta ortogonale a r_1 e r_2 e passante per il loro punto di intersezione.*

Soluzione:

a) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ 1 + t + 2t = 1 \\ 1 + t - 2t + 1 + t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ 3t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Quindi le rette sono incidenti nel punto $P(1, 0, 1)$.

b) Determiniamo quindi l'equazione parametrica di r_2:

$$r_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Quindi r_2 è parallela al vettore $(-1, 1, 2)$.

Il piano π passante per P e contenente r_1 e r_2 ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 0 + 2t + s \\ z = 1 + t + 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 3t \\ 2x + z = 3 + 3t \end{cases} \quad x - y + z = 2$$

Di conseguenza la direzione ortogonale a π (e quindi a r_1 e r_2) è $(1, -1, 1)$. Infine la retta cercata ha equazione

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Un metodo alternativo consisteva nel determinare il piano π_1 ortogonale a r_1 e il piano π_2 ortogonale a r_2 passanti per P:

$$\pi_1 : \ x + 2y + z = 2$$
$$\pi_2 : \ -x + y + 2z = 1$$

La retta cercata è data dall'intersezione di π_1 e π_2:

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ -x+y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3y+3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$$

Notiamo che anche se l'equazione parametrica è differente, si tratta ovviamente della stessa retta.

$\square$

Esercizio 1.2. *Sia* $V = \langle\, v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \,\rangle$ *con*

$$v_1 = (3, 7, k+1, 2k+2),\ v_2 = (2, 2k+2, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (-3, -7, -1, 2k)$$

a) *Si determini la dimensione di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.
b) *Si determini una base di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:
Consideriamo la matrice A associata ai quattro vettori:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 7 & 2k+2 & 1 & -7 \\ k+1 & 0 & 0 & -1 \\ 2k+2 & 0 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

Per ridurre la matrice a gradini scambiamo v_3 con v_1, ricordando poi tale scambio per rispondere alla domanda b).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2k+2 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k+2 & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ \\ IV-2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 2k & 4 & -4 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2k+2 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 0, -1$, allora $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 4$. Inoltre $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
- Se $k = 0$, la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow III-4II \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 3$. Inoltre

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_3, v_4\} = \{(3, 7, 1, 2),\ (1, 1, 0, 0),\ (-3, -7, -1, 0)\}.$$

- Se $k = -1$, la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 3$. Inoltre

$$\mathcal{B}(V) = \{v_2, v_3, v_4\} = \{(2, 0, 0, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (-3, -7, -1, -2)\}.$$

$\square$

Esercizio 1.3. *Si considerino i polinomi*

$$p_1(x) = x^2 + 2, \qquad p_2(x) = 3x + 4, \qquad p_3(x) = -x^2 + 6x + 6$$

e sia $W = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ *il sottospazio di* $\mathbf{R}_2[x]$ *generato da* p_1, p_2 *e* p_3.

a) *Si determini la dimensione e una base di* W.

b) *Si stabilisca per quali valori di k il polinomio $f_k(x) = (k+1)x^2 + 3kx + 4$ appartiene a W.*

Soluzione:

A ogni polinomio $a_2x^2 + a_1x + a_0$ di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare il vettore (a_2, a_1, a_0) formato dalle coordinate del polinomio rispetto alla base canonica $\{x^2, x, 1\}$. In questo caso otteniamo quindi i vettori

$$p_1 = (1,0,2), \quad p_2 = (0,3,4), \quad p_3 = (-1,6,6), \quad f_k = (k+1, 3k, 4)$$

Per rispondere alla prima domanda dobbiamo calcolare la dimensione di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$, mentre per rispondere alla seconda domanda dobbiamo verificare se l'equazione $xp_1 + yp_2 + zp_3 = f_k$ ammette soluzione. Consideriamo quindi direttamente la matrice $A|b$ che ci permette di rispondere anche alla seconda domanda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & k+1 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3k \\ 2 & 4 & 6 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 1/3II \\ 1/2III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & k+1 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 2 & 4 & | & -k+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & k+1 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & | & -3k+1 \end{bmatrix}$$

a) $\dim(W) = \text{rg}(A) = 2$. Inoltre

$$\mathcal{B}(W) = \{p_1(x),\ p_2(x)\} = \{x^2 + 2, \quad 3x + 4\}.$$

b) $f_k(x)$ appartiene a W se il sistema $A|b$ ammette soluzione. Per Rouché Capelli questo succede solo se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$, cioè se $k = \dfrac{1}{3}$.

□

Esercizio 1.4. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = x + y,\ 2x - y - z,\ 2y + z)$$

e sia $\mathcal{B} = \{(1,2,-4),\ (0,1,1),\ (1,0,-7)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) *Stabilire se T è iniettivo e/o suriettiva.*

b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$*

Soluzione:

Per rispondere alla domanda a) possiamo comunque calcolare prima la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$.

b) Siano $v_1 = (1,2,-4)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,0,-7)$. Il metodo più semplice consiste nel calcolare le tre immagini dei vettori della nuova base e poi trovare le coordinate di questi tre vettori rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.

$$T(v_1) = (3,4,0), \quad T(v_2) = (1,-2,3), \quad T(v_3) = (1,9,-7)$$

Si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1,2,3$. Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & | & 4 & -2 & 9 \\ -4 & 1 & -7 & | & 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III + 4I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & | & 12 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & | & 14 & 11 & -10 \end{bmatrix}$$

Risolviamo ora i tre sistemi:

$$T(v_1): \begin{cases} x+z=3 \\ y-2z=-2 \\ -z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=-30 \\ z=14 \end{cases} \Rightarrow T(v_1)=(-17,-30,14)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_2): \begin{cases} x+z=1 \\ y-2z=-4 \\ -z=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=-26 \\ z=-11 \end{cases} \Rightarrow T(v_2)=(12,-26,-11)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_3): \begin{cases} x+z=1 \\ y-2z=7 \\ -z=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-9 \\ y=27 \\ z=10 \end{cases} \Rightarrow T(v_3)=(-9,27,10)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -9 \\ -30 & -26 & 27 \\ -14 & -11 & 10 \end{bmatrix}$$

a) Dobbiamo in sostanza calcolare il rango di $M_{\mathcal{B}}(T)$. In alternativa risulta forse più semplice calcolare la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica e calcolare poi il rango di questa:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II-2I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim(Im(T)) = \operatorname{rg}(M(T)) = 3 \ \Rightarrow \quad T \text{ è suriettiva}$$
$$\dim(N(T)) = 3 - \operatorname{rg}(M(T)) = 0 \ \Rightarrow \quad T \text{ è iniettiva}$$

□

Esercizio 1.5. *Sia A la matrice dipendente dal parametro reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di A al variare di k.*
b) *Determinare una base di $\mathbf{R}^4$ costituita da autovettori di A per un valore opportuno di k.*

Soluzione:
Calcoliamo il polinomio caratteristico di A, sviluppando rispetto a opportune righe

$$\begin{aligned} p_M(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k-\lambda & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)\det \begin{bmatrix} 2-k-\lambda & 0 & -k \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ k & 0 & k+2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2[(2-k-\lambda)(k+2-\lambda)+k^2] = (1-\lambda)^2[(2-\lambda)^2-k^2+k^2] \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2,\ 1$, entrambi di molteplicità algebrica due.

Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(2) = N(A-2I): \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & -k & 0 & -k \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ (k-3)x - ky - kw = 0 \\ -z = 0 \\ (2-k)x + ky + kw = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -ky - kw = 0 \\ z = 0 \\ ky + kw = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi:

- Se $k \neq 0$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \quad \Rightarrow \dim(E(2)) = 1 \Rightarrow A \text{ non è diagonalizzabile}$$

- Se $k = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \quad \Rightarrow \dim(E(2)) = 2 \text{ e } E(2) = \langle (0,1,0,0),\ (0,0,0,1) \rangle.$$

A questo punto A può essere diagonalizzabile solo se $k = 0$. Si tratta di verificare se per $k = 0$ anche $\dim(E(1)) = 2$.

$$E(1) = N(M - I) \text{ con } k = 0: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = s \\ w = -2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dim(E(1)) = 2 \text{ e } E(1) = \langle (1,3,0,-2),\ (0,0,1,0) \rangle \text{ con } k = 0.$$

a) Abbiamo verificato che A è diagonalizzabile solo per $k = 0$.
b) Per $k = 0$ una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di A è data da

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \{\ (0,1,0,0),\ (0,0,0,1),\ (1,3,0,-2),\ (0,0,1,0)\ \}$$

□

Esercizio 1.6. *Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t \ : \ (2t-1)x^2 + 6txy + ty^2 + 2x = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = \dfrac{1}{3}$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 2t-1 & 3t & 1 \\ 3t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\det(A') = -t$, quindi la conica è degenere per $t = 0$

b) $\det(A) = -7t^2 - t$, quindi:
   - Se $t < -\dfrac{1}{7}$ o $t > 0$, $\det(A) < 0$ e si tratta di un'iperbole.
   - Se $-\dfrac{1}{7} < t < 0$, $\det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.
   - Se $t = -\dfrac{1}{7}$, $\det(A) = 0$ e si tratta di una parabola.
   - Se $t = 0$ otteniamo l'equazione $-x^2 + 2x = 0$, quindi si tratta di una coppia di rette parallele (infatti $\det(A) = 0$): $x = 0$ e $x = 2$.

c) Calcoliamo gli autovalori di A per $t = \dfrac{1}{3}$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{10}{9}$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$, discordi infatti si tratta di un'iperbole. La conica ha quindi equazione del tipo

$$\frac{\sqrt{10}}{3}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{3}y^2 + k = 0 \ \Rightarrow\ B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $I_3 = \det(B) = \det(A) = \dfrac{1}{3}$ otteniamo $-\dfrac{10}{9}k = -\dfrac{1}{3}$, cioè $k = \dfrac{3}{10}$. Quindi l'equazione di $\mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$ è

$$\frac{\sqrt{10}}{3}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{3}y^2 + \frac{3}{10} = 0 \ \Rightarrow\ -\frac{10\sqrt{10}}{9}x^2 + \frac{10\sqrt{10}}{9}y^2 - 1 = 0$$

Effettuando infine la rotazione che manda x in y e y in $-x$ otteniamo la forma canonica

$$\mathcal{C}_{\frac{1}{3}}: \quad \frac{10\sqrt{10}}{9}x^2 - \frac{10\sqrt{10}}{9}y^2 - 1 = 0$$

$\square$