I APPELLO D'ESAME - 23/06/2005 – A

A.A. 2004/05

Esercizio 1.1. *Stabilire per quali valori del parametro reale k il sistema lineare*

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k \end{cases}$$

ammette una, nessuna o infinite soluzioni

SOLUZIONE:

Riduciamo a gradii la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & k & 1 & | & k \\ 1 & 1 & k & k & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & k \\ 1 & k & 1 & | & k \\ k & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ II - I \\ III - kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & k \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & | & 1-k^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & k \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 0 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & | & 1-k^2 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo ora distinguere tre casi

- Se $k \neq 1, -2$ non si annulla nessun pivot della matrice A, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette una unica soluzione.
- Se $k = -2$ allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette nessuna soluzione.
- Se $k = 1$ allora $\text{rg}(A) = 1 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema ammette infinite soluzioni.

□

Esercizio 1.2. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:* $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,1,-1)$, $v_3 = (1,1,3)$, $w_1 = (2,3,-1)$, $w_2 = (1,2,2)$, $w_3 = (1,1,-3)$.

a) *Si calcoli la dimensione dei sottospazi* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.

b) *Si trovi una base del sottospazio intersezione* $V \cap W$.

SOLUZIONE:

a) Riduciamo a gradini le matrici A e B associate ai vettori v_i e w_i rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 2I \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III + 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 5II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$$
$$\dim(W) = \text{rg}(B) = 2$$

b) Dai risultati del punto precedente osserviamo che V e W sono sottospazi di $\mathbf{R}^3$ e che in particolare V ha dimensione 3, quindi $V = \mathbf{R}^3$. Di conseguenza:

$$V \cap W = \mathbf{R}^3 \cap W = W$$

Dai calcoli eseguinti nel punto precedente, tenendo conto che nello scrivere B abbiamo scambiato la naturale posizione di w_1 e w_3, otteniamo che:

$$\mathcal{B}(V \cap W) = \mathcal{B}(W) = \{w_3,\ w_2\}.$$

□

Esercizio 1.3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base.*

a) *Mostrare che l'insieme $\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4\}$ è una sua base di V.*
b) *Calcolare le coordinate del vettore $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto a $\mathcal{B}'$.*

Soluzione:

a) Essendo V di dimensione 4 è sufficiente verificare che i quattro vettori di $\mathcal{B}'$ sono linearmente indipendenti. Calcoliamo le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (1, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}} \\ v_2 + v_3 &= (0, 1, 1, 0)_{\mathcal{B}} \\ v_3 + v_4 &= (0, -0, 1, 1)_{\mathcal{B}} \\ v_4 &= (0, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

I quattro vettori sono linearmente indipendenti se la matrice associata ha rango 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow III - II \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow IV - III \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4, quindi anche $\mathcal{B}'$ è una base di V.

b) Le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(1, 1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$ in quanto $v = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4$. A questo punto per trovare le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}'$ è sufficiente risolvere l'equazione: $x(v_1 + v_2) + y(v_2 + v_3) + z(v_3 + v_4) + wv_4 = v$, dove tutti i vettori sono espressi rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$III - II \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow IV - III \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Infine $v = (1, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}'}$.

□

Esercizio 1.4. *Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\{(1, 1, 1),\ (0, 2, 2),\ (0, 0, 3)\}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) *Si scriva la matrice associata a S rispetto alle basi canoniche.*

b) *Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.*

Soluzione:

a) Dalla matrice si ricava

$$\begin{aligned} S(1, 1, 1) &= (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} \\ S(0, 2, 2) &= (0, 0, 2)_{\mathcal{B}} \\ S(0, 0, 3) &= (0, 1, 3)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

quindi per la linearità di S:

$$\begin{aligned} S(0, 0, 1) &= \frac{1}{3}(0, 1, 3)_{\mathcal{B}} = \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}} \\ S(0, 1, 0) &= \frac{1}{2}(0, 0, 2)_{\mathcal{B}} - \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}} = \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)_{\mathcal{B}} \\ S(1, 0, 0) &= (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} - \frac{1}{2}(0, 0, 2)_{\mathcal{B}} = (0, 0, 0)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} S(e_1) &= (0, 0, 0) \\ S(e_2) &= -\frac{1}{3}(0, 2, 2) = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ S(e_3) &= \frac{1}{3}(0, 2, 2) + 1(0, 0, 3) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right) \end{aligned}$$

dove tutti i vettori sono finalmente espressi rispetto alla base canonica, e la matrice associata a S rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

c) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ 3II \\ 3III \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{ \ (0, -2, -2), \ (0, 2, 11) \ \}$$

Per ricavare il nucleo di S risolviamo il sistema omogeneo associato a A

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ 9z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(S)) = \{ \ (1, 0, 0) \ \}$$

$\square$

Esercizio 1.5. *Sia T l'endomorfismo do $\mathbf{R}^4$ cosí definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1, x_3, x_4, -3x_2 + x_3 + 3x_4)$$

a) *Mostrare che 1 è autovalore di T.*
b) *Stabilire se T è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base rispetto a cui T ha matrice diagonale.*
c) *L'endomorfismo T è simmetrico?*

Soluzione:

Determiniamo la matrice associata a T rispetto alla base canonica calcolando:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (3, 0, 0, 0) \\ T(e_2) &= (0, 0, 0, -3) \\ T(e_3) &= (0, 1, 0, 1) \\ T(e_4) &= (0, 0, 1, 3) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = (3-\lambda)\left[-\lambda(-3\lambda+\lambda^2-1)\lambda^2-3\right] = (3-\lambda)\left[-\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-3\right] \\ &= (3-\lambda)\left[\lambda^2(-\lambda+3)-(-\lambda+3)\right] = (3-\lambda)^2\left[\lambda^2-1\right] \end{aligned}$$

a) Gli autovalori A sono

$$\begin{aligned} &\lambda = 3 \qquad \text{doppio} \\ &\lambda = 1 \\ &\lambda = -1 \end{aligned}$$

In particolare $\lambda = 1$ è autovalore.

b) Calcoliamo l'autospazio $E(3)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-3I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_2+x_3=0 \\ -3x_3+x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = 3t \\ x_4 = 9t \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(3) = \langle\ (0,1,3,9),\ (1,0,0,0)\ \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che T è diagonalizzabile in quanto $E(3)$ ha dimensione 2 e gli altri due autovalori sono singoli.

Calcoliamo l'autospazio $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV-3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ -x_2+x_3=0 \\ -x_3+x_4=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow \quad E(1) = \langle\ (0,1,1,1)\ \rangle$$

Calcoliamo l'autospazio $E(-1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A+I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV+3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 = 0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_3+x_4=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow \quad E(-1) = \langle\ (0,1,-1,1)\ \rangle$$

Infine T ha una matrice diagonale rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1,0,0,0),\ (0,1,3,9),\ (0,1,1,1),\ (0,1,-1,1)\ \}$$

c) T non è simmetrico in quanto la matrice A associata a T rispetto alla base canonica (che è ortogonale) non è simmetrica.

$\square$

Esercizio 1.6. *Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} \qquad s: \ x + y - 1 = x - y + z = 0$$

a) *Mostrare che le due rette sono sghembe.*
b) *Determinare un'equazione del piano contenente la retta r e parallelo alla retta s.*
c) *Determinare un'equazione del piano parallelo alle due rette ed equidistante da esse.*

Soluzione:

a) Due rette del piano sono sghembe se non sono parallele e non si intersecano. L'equazione parametrica di s è:

$$s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Quindi r ha direzione $(1, -1, 0)$ mentre s ha direzione $(-1, 1, 2)$ e le due rette non sono parallele. Inoltre se calcoliamo $r \cap s$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ x + y - 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ 1 + t + 1 - t - 1 = 0 \\ 1 + t - 1 + t + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ 1 = 0 \\ 3 + 2t = 0 \end{cases}$$

il sistema non ammette soluzione, quindi le due rette non si intersecano.
Di conseguenza r e s sono sghembe.

b) Sia π il piano cercato. Poiché π contiene r, deve essere parallelo a r e passare per un punto di r. Sia $A = (1, 1, 3)$ il punto di r, imponendo inoltre le condizioni di parallelismo alle due rette, otteniamo:

$$\pi: \begin{cases} x = 1t - s \\ y = 1 - t + s \\ z = 3 + 2s \end{cases} \Rightarrow \ x + y = 2$$

c) Si può procedere in più modi. Forse il più semplice è calcolare il piano π' passante per s e parallelo a r in maniera analoga al punto precedente. Sia $B = (1, 0, -1)$ il punto di s:

$$\pi': \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = -t + s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \Rightarrow \ x + y = 1$$

Il piano cercato è parallelo a π e π', quindi ha una equazione del tipo $x + y = d$. Inoltre essendo equidistante da r e da s è anche equidistante da π e π', ovvero il valore di d è dato dalla media degli analoghi valori di π e π':

$$d = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Infine il piano cercato è

$$x + y = \frac{3}{2}$$

$\square$