PROVA INTERMEDIA - *GEOMETRIA E ALGEBRA* – A – 31/08/2011

CORSO DI LAUREA IN ING. IND. E ING. ELETT. TEL. (CORSO A-L)

Esercizio 0.1. *Siano* $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (0, 2, 3)$, $D = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$ *punti dello spazio.*

a) *Si mostri che* A, B, C, D *sono complanari e si calcoli un'equazione cartesiana del piano* π *che li contiene.*
b) *Sia* $E = (2, 2, 2)$*. Usando i vettori geometrici, si calcoli l'area del parallelogramma che ha* A, B, C *come vertici e il volume del parallelepipedo definito da* A, B, C, E*.*

SOLUZIONE:

a) Per verificare che i quattro punti sono complanari basta determinare un'equazione del piano π passante per tre di essi, per esempio A, B e C, e verificare che D appartiene a tale piano. Poiché è richiesta un'equazione cartesiana, possiamo considerare il generico piano $ax+by+cz = d$ e imporre il passaggio per A, B, C ottenendo il sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = d \\ b + 2c = d \\ 2b + 3c = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -d \\ c = d \end{cases} \quad \forall d \in \mathbb{R}$$

Ponendo per esempio $d = 1$ otteniamo l'equazione

$$\pi : \quad -y + z = 1$$

È immediato verificare che il punto D appartiene a π, quindi i quattro punti sono complanari.

b) Il parallelogramma di vertici A, B, C ha come lati consecutivi i vettori geometrici $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 0)$. Cominciamo a calcolare il prodotto vettoriale tra i due vettori

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = j - k = (0, 1, -1)$$

L'area del parallelogramma è il determinante di tale vettore:

$$\mathcal{A}(\text{parallelogramma}) = \sqrt{2}$$

Il parallelepipedo richiesto ha come spigoli consecutivi i vettori geometrici $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 0)$ e $\overrightarrow{AE} = (1, 0, -1)$. Il suo volume è dato dal valore assoluto del prodotto misto $\overrightarrow{AE} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)$. Avendo già calcolato $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, otteniamo

$$\mathcal{V}(\text{parallelepipedo}) = |(0, 1, -1) \cdot (1, 0, -1)| = 1$$

$\square$

Esercizio 0.2. *Si considerino i polinomi in* $\mathbb{R}_2[x]$

$$p_1(x) = 3x^2 + 8x - 11, \quad p_2(x) = x^2 + kx - 3, \quad p_3(x) = -x^2 - 9$$

(con k *parametro reale).*

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *i tre polinomi sono dipendenti.*
b) *Al variare del parametro* k*, si trovi una base del sottospazio* $V = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ *generato dai tre polinomi.*

SOLUZIONE:

Fissata la base $\{x^2, x, 1\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$, ai tre polinomi possiamo associare i vettori

$$p_1 = (3, 8, -11), \qquad p_2 = (1, k, -3), \quad p_3 = (-1, 0, -9)$$

a) Per stabilire se i vettori, e quindi i polinomi, sono dipendenti possiamo considerare la matrice associata ai tre vettori e calcolarne il determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 8 & k & 0 \\ -11 & -3 & -9 \end{bmatrix}, \qquad \det(A) = -38k + 96$$

I tre polinomi sono dipendenti se la matrice ha determinante nullo, ovvero se $k = \dfrac{48}{19}$.

In alternativa si poteva ridurre A a gradini e calcolarne il rango.

b) Abbiamo visto al punto precedente se $k \neq \dfrac{48}{19}$, i tre polinomi sono indipendenti; di conseguenza

$$\mathcal{B}(V) = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\} = \left\{3x^2 + 8x - 11,\ x^2 + kx - 3,\ -x^2 - 9\right\} \qquad \text{se } k \neq \frac{48}{19}.$$

Per $k = \dfrac{48}{19}$, basta osservare che i tre polinomi sono dipendenti, mentre, per esempio, $p_1(x)$ e $p_3(x)$ sono indipendenti in quanto non sono uno multiplo dell'altro. Quindi

$$\mathcal{B}(V) = \{p_1(x), p_3(x)\} = \left\{3x^2 + 8x - 11,\ -x^2 - 9\right\} \qquad \text{se } k = \frac{48}{19}.$$

□

Esercizio 0.3. *Cos'è la base di uno spazio vettoriale? Quanti elementi contiene una base dello spazio delle matrici reali simmetriche di ordine 2? Giustificare la risposta.*

Esercizio 0.4. *Sia A la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare basi dei nuclei $E(2) = \mathrm{N}(A - 2I_4)$ e $E(-2) = \mathrm{N}(A + 2I_4)$.*
b) *Usando la parte* a) *mostrare che 2 e -2 sono gli unici autovalori.*
c) *La matrice A è diagonalizzabile? In caso affermativo, trovare una matrice P diagonalizzante, cioè tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.*

Soluzione:

a) Per trovare basi dei nuclei basta risolvere i sistemi omogenei associati:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I_4) = \mathrm{Sol}(A - 2I_4|0) : \quad \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ II + I \\ III - I \\ IV + I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow\ -x + y - z + w = 0\ \Rightarrow \begin{cases} x = t - s + h \\ y = t \\ z = s \\ w = h \end{cases} \qquad \forall t, s, h \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(E(2)) = \{(1,1,0,0),\ (-1,0,1,0),\ (1,0,0,1)\}$$

$$E(-2) = \mathrm{N}(A+2I_4) = \mathrm{Sol}(A+2I_4|0) : \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ 3II-I \\ III+II \\ IV+III \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 8 & 4 & -4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/4II \\ 2III-II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 1/4III \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y-z+w=0 \\ 2y+w-z=0 \\ z+w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-t \\ w=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(E(-2)) = \{(-1,1,-1,1)\}$$

b) Poiché la somma delle molteplicità geometriche dei due autovalori è 4, pari all'ordine di A, non possono esistere altri autovalori.

c) Per quanto visto al punto a), la matrice A è diagonalizzabile. Inoltre abbiamo già trovato gli autospazi, quindi la matrice P diagonalizzante, di cambiamento di base, è

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice A è simmetrica, quindi è necessariamente diagonalizzabile.

□

Esercizio 0.5. *Si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Si determino gli autovalori di T e si stabilisca se T è diagonalizzabile.*

b) *Si trovino basi ortonormali degli autospazi di T.*

Soluzione:

a) T è sicuramente diagonalizzabile in quanto la matrice associata rispetto alla base canonica è simmetrica.

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda).$$

Di conseguenza gli autovalori di T sono $\lambda = 0, 1, 6$. Anche a questo punto potevamo concludere che T è diagonalizzabile in quanto ha tre autovalori singoli.

b) Calcoliamo gli autospazi di T:

$$E(0) = \mathrm{N}(A) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(E(0)) = \{(-2,-1,1)\}, \qquad \mathcal{B}_{\text{ortonormale}}(E(0)) = \left\{ \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

$$E(1) = \mathrm{N}(A-I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ 2x+y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(E(1)) = \{(1,-2,0)\}, \qquad \mathcal{B}_{\text{ortonormale}}(E(1)) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right) \right\}$$

$$E(6) = \mathrm{N}(A - 6I): \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 5III + 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5x + 2z = 0 \\ -5y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 5t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(E(6)) = \{(2, 1, 5)\}, \qquad \mathcal{B}_{\text{ortonormale}}(E(6)) = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right) \right\}$$

□

Esercizio 0.6. *Come si introducono le* coordinate *in uno spazio vettoriale? Che relazione c'è tra diversi sistemi di coordinate?*