GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE – A – 28/06/2012

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETT. TEL. E ING. ORG.

Esercizio 0.1. *Si considerino il fascio di piani $\pi_k: \ x+2y+3z=k$, con k parametro reale, e la retta r di equazioni*

$$r: \begin{cases} x=-7 \\ y=1-3t \\ z=2+2t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si stabilisca per quali k la retta r appartiene a π_k.*
b) *Dato il punto $A(1,1,1)$, si determinino equazioni cartesiane e parametriche del piano π' perpendicolare a r e passante per A e della retta r' perpendicolare a π_k e passante per A.*
c) *Si detrminino le equazioni della retta parallela a π_k e perpendicolare a r passante per l'origine.*

Soluzione:

a) Perché r appartenga a π_k, le coordinate del generico punto di r devono soddisfare l'equazione di π_k, quindi, sostituendo:

$$-7+2(1-3t)+3(2+2t)=k \qquad \Rightarrow \qquad 1=k$$

Di conseguenza r appartiene a π_k per $k=1$.
b) La direzione ortogonale a π_k è $(1,2,3)$, quindi r' ha equazioni:

$$r': \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+3t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x-z=2 \end{cases}$$

La retta r è parallela a $(0,-3,2)$, quindi il piano ortogonale a r per A ha equazioni

$$\pi': \ -3y+2z=-1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=s \\ y=t \\ z=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

c) Una retta passante per l'origine e parallela a π_k appartiene al piano parallelo a π_k passante per l'origine, di equazione $x+2y+3z=0$. Analogamente una retta passante per l'origine e perpendicolare a r appartiene al piano ortogonale a r passante per l'origine, di equazione $-3y+2z=0$. Di conseguenza la retta cercata è data dall'intersezione di tali piani:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -3y+2z=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=-\frac{13}{2}t \\ y=t \\ z=\frac{3}{2}t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 0.2. *Si considerino i seguenti polinomi di $\mathbf{R}_3[x]$:*

$$p_1(x)=x^3+1, \qquad p_2(x)=-x^2-x, \qquad p_3(x)=x^3+(k-1)x+1 \qquad p_4(x)=2x^2+(k+1)x+k^2-k$$

con k parametro reale, e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}_3[x]$ generato da $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$.

a) *Si stabilisca per quali k il polinomio $p(x)=x^3+k+1$ appartiene a V. Posto $k=2$ si scriva esplicitamente $p(x)$ come combinazione lineare di $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$.*
b) *Si determini la dimensione e una base di V.*

Soluzione:

Ad ogni polinomio possiamo associare le sue coordinate rispetto alla base canonina $\{x^3, x^2, x, 1\}$ di $\mathbf{R}_3[x]$:

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x^3 + 1 && \rightarrow && p_1 = (1, 0, 0, 1)\\
p_2(x) &= -x^2 - x && \rightarrow && p_2 = (0, -1, -1, 0)\\
p_3(x) &= x^3 + (k-1)x + 1 && \rightarrow && p_3 = (1, 0, k-1, 1)\\
p_4(x) &= 2x^2 + (k+1)x + k^2 - k && \rightarrow && p_4 = (0, 2, k+1, k^2 - k\\
p(x) &= x^3 + k + 1 && \rightarrow && p = (1, 0, 0, k+1)
\end{aligned}$$

Si tratta quindi di stabilire se il vettore p appartiene al sottospazio $V' = \langle p_a, p_2, p_3, p_4 \rangle$ di $\mathbf{R}^4$ e di determinare la dimensione e una base di take sottospazio.
Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|p$:

$$A|p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & k+1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & k^2-k & | & k+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & | & k \end{bmatrix}$$

a) Il vettore p appartiene a V', e quindi il polinomio $p(x)$ appartiene a V, se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p)$. I possibili pivot di A si annullano per $k = 0$ o $k = 1$. Notiamo però che per $k = 0$ si ha $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p) = 3$, mentre per $k = 1$ si ha $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A|p) = 3$. Per $k \neq 0, 1$, infine, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p) = 4$. Di conseguenza il sistema ammette soluzione, ovvero $p(x)$ appartiene a V, se e solo se $k \neq 1$.
   Ponendo $k = 2$ nella matrice ridotta otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ -y + 2w = 0 \\ z + w = 0 \\ 2w = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad p(x) = 2p_1(x) + 2p_2(x) - p_3(x) + p_4(x)$$

b) Consideriamo solo la matrice dei coefficienti, di cui abbiamo già studiato il rango:
   – Se $k \neq 0, 1$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 4$ e una sua base è
   $$\mathcal{B} = \{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)\}.$$
   – Se $k = 0$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$ e una sua base è
   $$\mathcal{B} = \{p_1(x) = x^3 + 1,\ p_2(x) = -x^2 - x,\ p_3(x) = x^3 - x + 1\}.$$
   – Se $k = 1$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$ e una sua base è
   $$\mathcal{B} = \{p_1(x) = x^3 + 1,\ p_2(x) = -x^2 - x\}.$$

□

Esercizio 0.3. *Dare la definizione di* sottospazio vettoriale. *Dare un esempio di sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}^4$ *e fornire un esempio di sottoinsieme di* $\mathbf{R}^4$ *che* non *è un sottospazio vettoriale.*

Esercizio 0.4. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(e_1) = (1, 0, 1), \qquad T(e_2) = (0, k+2, 0), \qquad T(e_3) = (1, k, k), \qquad T(e_4) = (2, 1, 2)$$

e sia $v = (1, 0, k+3)$, *con* k *parametro reale.*

a) *Si stabilisca per quali* k *l'applicazione* T *è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Si determinino basi di nucleo e immagine di* T *al variare di* k.
c) *Si stabilisca per quali* k *il vettore* v *appartiene all'immagine di* T.

Soluzione:
La matrice associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & k+2 & k & 1 \\ 1 & 0 & k & 2 \end{bmatrix}$$

Per rispondere a tutte le domande ridiciamo a gradini la matrice $M|v$:

$$M|v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & k+2 & k & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & k & 2 & | & k+3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & k+2 & k & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & | & k+2 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice M. L'applicazione T è suriettiva se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = \dim(\mathbf{R}^3) = 3$, mentre T è iniettiva se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(M) = 0$.
I possibili pivot di M si annullano per $k = 1$ o $k = -2$. Notiamo però che per $k = 1$ si ha $\mathrm{rg}(M) = 2$, mentre per $k = -2$ il rango di M resta comunque massimo, $\mathrm{rg}(M) = 3$. Di conseguenza T è suriettiva se e solo se $k \neq 1$, quando $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 3$.
Notiamo che in ogni caso $\mathrm{rg}(M) \leq 3$, quindi $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(M) \geq 1$ e T non è iniettiva per nessun valore di k.

b) È sufficiente distinguere due casi:
   - Se $k \neq 1$, abbiamo visto che T è suriettiva quindi $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$ e una sua base è una qualsiasi base di $\mathbf{R}^3$. In particolare una possibile base è
   $$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1) = (1,0,1),\ T(e_3) = (1,k,k),\ T(e_4) = (2,1,2)\}, \qquad \dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$$
   Notiamo che l'insieme $\{T(e_1) = (1,0,1),\ T(e_2) = (0,k+2,0),\ T(e_3) = (1,k,k)\}$ non è una base per $k = -2$, infatti contiene il vettore nullo, mentre potrebbe essere presa come base per $k \neq 1, -2$.
   Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M:
   $$\begin{cases} x + z + 2w = 0 \\ (k+2)y + kz + w = 0 \\ (k-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (2k+4)t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = (-k-2)t \end{cases}$$
   Quindi una base del nucleo è
   $$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(2k+4, 1, 0, -k-2)\}, \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 1$$
   - Se $k = 1$ abbiamo osservato al punto precedente che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 2$. Inoltre una sua base è
   $$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1) = (1,0,1),\ T(e_2) = (0,3,0)\}$$
   Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M:
   $$\begin{cases} x + z + 2w = 0 \\ 3y + z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6t + s \\ y = t \\ z = s \\ w = -3t - s \end{cases}$$
   Quindi una base del nucleo è
   $$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(6,1,0,-3),\ (1,0,1,-1)\}, \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 2$$

c) Abbiamo già osservato che per $k \neq 1$ l'applicazione T è suriettiva, quindi in tali casi v appartiene all'immagine di T, che coincide con tutto $\mathbf{R}^3$. Infatti per $k \neq 1$, si ha $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|v) = 3$.
Per $k = 1$, invece, $\mathrm{rg}(M) = 2 \neq \mathrm{rg}(M|v) = 3$, quindi v non appartiene all'immagine di T.

□

Esercizio 0.5. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'endomorfismo definito dalla matrice*
$$M = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca se T è diagonalizzabile.*
b) *Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T.*
c) *Si determini la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.*

Soluzione:

a) L'endomorfismo T è sicuramente diagonalizzabile perché la matrice M associata a T rispetto alla base canonica, che è ortonormale, è simmetrica.

b) Il polinomio caratteristico di T è

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= (5-\lambda)(5-\lambda)\left[(-3-\lambda)^2-25\right]+3(-3)\left[(-3-\lambda)^2-25\right] \\ &= (5-\lambda)^2\left[\lambda^2+6\lambda-16\right]-9\left[\lambda^2+6\lambda-16\ \right] = (\lambda^2+6\lambda-16)\left[(5-\lambda)^2-9\right] \\ &= (\lambda^2+6\lambda-16)(\lambda^2-10\lambda-9) \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di T sono $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = \pm 8$, singoli.

Calcoliamo gli autospazi.

$$E(2) = \mathrm{N}(M-2I): \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & | & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II-I \\ 1/5III \\ IV+III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = s \\ w = s \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (1,1,0,0),\ (0,0,1,1) \rangle$$

Notiamo che i due generatori trovati sono tra loro ortogonali.

$$E(8) = \mathrm{N}(M-8I): \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 & | & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} -1/3I \\ II-I \\ \\ 11IV+5III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -96 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow E(8) = \langle (1,-1,0,0) \rangle$$

$$E(-8) = \mathrm{N}(M+8I): \begin{bmatrix} 11 & -3 & 0 & 0 & | & 0 \\ -3 & 11 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 11II+3I \\ 1/5III \\ IV-III \end{array} \begin{bmatrix} 11 & -3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 112 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ w = -t \end{cases} \Rightarrow E(-8) = \langle (0,0,1,-1) \rangle$$

I generatori degli autospazi trovati sono tutti tra loro ortogonali, quindi una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ si ottiene normalizzando tali vettori:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right),\ \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right),\ \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

c) Per definizione di autovettore, la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale

$$M_{\mathcal{B}}(T) = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Infatti, per esempio,

$$T(v_1) = T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) = \lambda v_1 = 2v_1 = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 = (2,0,0,0)_{\mathcal{B}}$$

Risultati analoghi si ottengono per gli altri autovettori.

□

Esercizio 0.6. *Cos'è un* autovalore *di una matrice? Dare degli esempi per matrici* 3×3. *Dare anche un esempio di matrice reale priva di autovalori.*