PROVA INTERMEDIA - *GEOMETRIA E ALGEBRA* – A – 29/6/2011

CORSO DI LAUREA IN ING. IND. E ING. ELETT. TEL. (CORSO A-L)

Esercizio 0.1. *Si consideri il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + kx_3 + 2x_4 = k \\ kx_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + kx_3 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

a) *Si studi la risolubilità del sistema al variare del parametro reale k.*
b) *Posto $k = -1$, si trovino tutte le soluzioni del sistema e si determini una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice $A|b$ associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & k & 2 & | & k \\ k & 4 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 4 & k & k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - kII \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & k & 2 & | & k \\ 0 & 4-4k & 1-k^2 & 1-2k & | & -k^2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & | & 1-k \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che i termini $4 - 4k$ e $1 - k^2$, possibili pivot della seconda riga, sono contemporaneamente nulli solo se $k = 1$. Si tratta quindi di distinguere tre casi:
   – Se $k \neq 1, 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da un paramentro.
   – Se $k = 2$, allora $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema non ammette soluzione.
   – Se $k = 1$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix},$$

   quindi anche in questo caso $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.

b) Posto $k = -1$ nella matrice ridotta, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 8x_2 + 3x_4 = -1 \\ -3x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t - \frac{1}{6} \\ x_2 = \frac{1}{8} \\ x_3 = t \\ x_4 = -\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, 0, -\frac{2}{3}\right) + (1, 0, 1, 0)t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Senza fare ulteriori conti ne deduciamo che una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è

$$\mathcal{B}\left(\text{Sol}(Ax = 0)\right) = \{(1, 0, 1, 0)\}$$

□

Esercizio 0.2. *Sia M la seguente matrice reale:*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & k+3 & k \\ 3 & 11 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \textit{con } k \textit{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k la matrice M è invertibile.*
b) *Si calcoli l'inversa di M per $k = 1$.*

Soluzione:

a) Una matrice è invertibile se ha determinante diverso da zero. Poiché $\det(M) = 4k - 3$, ne segue che M è invertibile se $k \neq \dfrac{3}{4}$.

b) Posto $k=1$, possiamo calcolare l'inversa di M con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 11 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 2II-I \\ III-3II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III+II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} I+III \\ II-3III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} I-7II \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -7 & -18 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -18 & 11 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 0.3. *Cos'è un insieme di vettori* linearmente indipendenti *in uno spazio vettoriale? Qual è il numero massimo di vettori indipendenti che si possono trovare in* $\mathbb{R}^5$*?*
Dare un esempio di tre vettori indipendenti nello spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 0.4. *Sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = ((k+1)x_2 + kx_3, (k-1)x_1 + x_2 + 2kx_3, x_2 + 2x_3),$$

con k *parametro reale.*

a) *Scrivere la matrice associata a* T *rispetto alla base canonica.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di* T *al variare di* k.

SOLUZIONE:

a) La matrice associata a T rispetto alla base canonica ha per colonne le immagini degli elementi della base canonica, $T(e_1)$, $T(e_2)$ e $T(e_3)$:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & k+1 & k \\ k-1 & 1 & 2k \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Per come è fatta la matrice, può essere comodo escludere il caso in cui $\text{rg}(M) = 3$ calcolandone il determinante:

$$\det(M) = -(k-1)(2k+2-k) = -(k-1)(k+2)$$

Dobbiamo quindi distinguere tre casi

– Se $k \neq 1, -2$, abbiamo visto che $\det(M) \neq 0$, quindi $\text{rg}(M) = \dim(\text{Im}(T)) = 3$ e $\dim(\text{N}(T)) = 3 - \text{rg}(M) = 0$. Di conseguenza $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$ e come base dell'immagine possiamo prendere anche la base canonica di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$; inoltre $\text{N}(T) = \{0\}$.
– Se $k = 1$ otteniamo la matrice:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 2II-I \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi $\text{rg}(M) = \dim(\text{Im}(T)) = 2$ e $\dim(\text{N}(T)) = 3 - \text{rg}(M) = 1$. Inoltre una base di $\text{Im}(T)$ è $\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{T(e_2),\ T(e_3)\} = \{(2,1,1),\ (1,2,2)\}$. Per determinare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M:

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = x_3 = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e una base del nucleo di T è $\mathcal{B}(\text{N}(T)) = \{(1,0,0)\}$.

– Se $k = -2$ otteniamo la matrice:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ -I \\ III + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi $\text{rg}(M) = \dim(\text{Im}(T)) = 2$ e $\dim(\text{N}(T)) = 3 - \text{rg}(M) = 1$. Inoltre una base di $\text{Im}(T)$ è $\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2)\} = \{(0, -3, 0),\ (-1, 1, 1)\}$. Per determinare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e una base del nucleo di T è $\mathcal{B}(\text{N}(T)) = \{(-2, -2, 1)\}$.

□

Esercizio 0.5. *Si consideri la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Mostrare che $v = (1, -2, 2)$ è un autovettore di A. Calcolare gli autovalori di A.*
b) *Se esiste, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.*

Soluzione:

a) Per mostrare che $v = (1, -2, 2)$ è un autovettore di A basta verificare che $A \cdot v^t = \lambda \cdot v^t$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$. In effetti:

$$A \cdot v^t = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ -12 \end{bmatrix} = -6 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -6 \cdot v^t$$

Di conseguenza v è un autovettore di T relativo all'autovalore $\lambda = -6$. Notiamo che questo implica che il polinomio caratteristico di A sia divisibile per $\lambda + 6$.

Per determinare tutti gli autovalori di T, calcoliamo il polinomio caratteristico, eventualmente sfruttando l'informazione precedente per scomporlo: $p_A(\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 6)$.

Di conseguenza gli autovalori di A sono $\lambda = -6$, singolo, e $\lambda = -3$, doppio.

b) Determiniamo gli autovettori di A. Sappiamo già che $v = (1, -2, 2)$ è un autovettore dell'autospazio $E(-6)$. Avendo tale autospazio dimensione uno, ne segue che $E(-6) = \langle (1, -2, 2) \rangle$.

Calcoliamo $E(3)$:

$$E(3) = \text{N}(A - 3I) : \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + 2I \\ III + II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$-x + 2y - 2z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2s - 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow E(3) = \langle (2, 1, 0),\ (-2, 0, 1) \rangle$$

Notiamo che i generatori di $E(3)$ trovati non sono ortogonali, dobbiamo quindi utilizzare Gram-Schmidt. Sia $v_1 = (2, 1, 0)$ e $v_2 = (-2, 0, 1)$. Costruiamo una base ortogonale ponendo:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (-2, 0, 1) - \left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

Possiamo prendere quindi come generatori ortogonale di $E(3)$ i vettori $w_1 = (2, 1, 0)$ e $w_2 = (-2, 4, 5)$, quindi $E(3) = \langle (2, 1, 0),\ (-2, 4, 5) \rangle$.

Normalizzando i tre autovalori ortogonali trovati otteniamo la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ richiesta:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^3) = \left\{ \frac{1}{3}(1, -2, 2),\ \frac{\sqrt{5}}{5}(2, 1, 0),\ \frac{\sqrt{5}}{15}(-2, 4, 5) \right\}$$

□

Esercizio 0.6. *Dare la definizione di* autovalore *di una funzione lineare. Cos'è la molteplicità geometrica di un autovalore?*
Ogni funzione lineare di $\mathbb{R}^2$ *in sè ha autovalori? Giustificare la risposta.*