PROVA INTERMEDIA - *GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE* – C – 13/4/2012

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETT. TEL. E ING. ORG.

Per lo svolgimento completo degli esercizi si veda la fila A.

Esercizio 0.1. *Si considerino i punti* $A = (1, 0, -4)$, $B = (0, 1, -2)$ *e* $C = (1, -1, -3)$.

a) *Si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* A *e* B *e del piano* π *contenente* r *e* C.

b) *Si determini la distanza di* r *dall'origine.*

c) *Si determini la distanza di* π *dall'origine.*

Soluzione:

Soluzione:

a) La retta r ha direzione $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 2)$, quindi ha equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -4 + 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + z = -2 \end{cases}$$

Calcoliamo π come il piano passante per A, B e C. Poiché $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$, otteniamo le equazioni

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t - s \\ z = -4 + 2t + s \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad 3x + y + z = -1$$

b) Per calcolare la distanta di r dall'origine, determiniamo il piano π_0 perpendicolare a r e passante per l'origine. Quindi, indicata con P l'intersezione tra π_0 e r, la distanza di r dall'origine equivale alla lunghezza del segmento OP. Poiché π_0 ha equazione $-x + y + 2z = 0$, otteniamo

$$P = \pi_0 \cap r = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right) \qquad \Rightarrow \qquad d(O, r) = \overline{OP} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

c) Per determinare la distanza del piano π dall'origine possiamo usare direttamente la formula

$$d(\pi, O) = \frac{|-1|}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

In alternativa possiamo determinare la retta r_0 passante per l'origine e perpendicolare a P. Indicato con Q il punto di intersezione tra tale retta r_0 e il piano π, la distanza di r dall'origine equivale alla distanza di P da O.

La direzione ortogonale a π è $\overrightarrow{v} = (3, 1, 1)$, quindi

$$r_0 : \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \pi \cap r_0 = \left(-\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}\right)$$

Infine

$$d(O, \pi) = \overline{OQ} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

$\square$

Esercizio 0.2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & k^2 - k + 2 & k + 5 \end{bmatrix} \qquad k \text{ parametro reale}$$

a) *Si calcoli il rango di* A *al variare di* k *in* $\mathbf{R}$

b) *Dato* $b = (0, 1, k - 1)$, *si risolva il sistema* $Ax = b$ *al variare di* k.

c) *Esistono valori di k per cui il sistema $Ax = c$ non ammette mai soluzione, qualsiasi sia $c \in \mathbf{R}^3$? Si giustifichi la risposta.*

Soluzione:

Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 0 & k^2-k+2 & k+5 & | & k-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & k^2-k & k-1 & | & k-1 \end{bmatrix}$$

a) I possibili pivot $k^2 - k$ e $k - 1$ si annullano rispettivamente per $k = 0$ o $k = 1$ e per $k = 1$. Di conseguenza
   - Se $k \neq 1$, la matrice A ha rango 3.
   - Per $k = 1$, la matrice A ha rango 2.

b) Scegliendo in maniera opportuna i parametri, per risolvere il sistema $A|b$ è sufficiente distinguere due casi.
   - Se $k \neq 1$, dividendo la terza riga per $k - 1$, otteniamo facilmente le soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = -3 - t + 3kt \\ x_2 = 1 - 2kt \\ x_3 = t \\ x_4 = 1 - kt \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3, 1, 0, 1) + (3k - 1, -2k, 1, -k)t \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

   - Per $k = 1$ otteniamo le soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = -t - 3s \\ x_2 = -1 + 2s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -1, 0, 0) + (-1, 0, 1, 0)t + (-3, 2, 0, 1)s \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

c) Notiamo che se $k \neq 1$, allora la matrice A ha rango massimo, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|c) = 3$ qualsiasi sia $c \in \mathbf{R}^3$, quindi il sistema $Ax = c$ ammette sempre soluzione. Se $k = 1$ il sistema $Ax = c$ ammette o non ammette soluzione a seconda del valore di $c \in \mathbf{R}^3$. Abbiamo però visto che se $c = b$ il sistema ammette soluzione; analogamente se $c = 0$ otteniamo un sistema omogeneo che quindi ammette soluzione.

   In conclusione, non esistono valori di k per cui il sistema $Ax = c$ non ammette mai soluzione, qualsiasi sia $c \in \mathbf{R}^3$.

$\square$

Esercizio 0.3. *Dare la definizione di* rango *di una matrice. Descrivere la relazione tra il rango di una matrice A e le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$. Illustrare con esempi.*

Esercizio 0.4. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & k \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ k-1 & k+2 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & k^2-k+3 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 2k \end{bmatrix},$$

con k parametro reale.

a) *Si stabilisca per quali valori di k la matrice E è combinazione lineare di A, B, C e D.*
b) *Posto $K = 2$, si esprima E come combinazione lineare di A, B, C e D.*

Soluzione:

Si tratta di impostare l'equazione $xA + yB + zC + wD = E$, che si esplicita nel sistema a cui è associata la matrice

$$M|b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ -2 & k & -3 & -6 & | & k \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 1 & k & k+2 & k^2-k+3 & | & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II+2I \\ \\ IV-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 & | & k \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & k & k & k^2-k & | & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 & | & k \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k^2-k & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 & | & k \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & | & k \end{bmatrix}$$

a) Notiamo innanzitutto che se $k \neq 0, 1$, allora $\text{rg}(M) = \text{rg}(M|b) = 4$, quindi il sistema ha soluzione e la matrice E è combinazione lineare di A, B, C, D. Se $k = 0$, $\text{rg}(M) = \text{rg}(M|b) = 3$ quindi il sistema ha soluzione e la matrice E è combinazione lineare di A, B, C, D. Per $k = 1$ invece $\text{rg}(M) = 2 \neq \text{rg}(M|b) = 3$, quindi il sistema non ha soluzione e la matrice E non è combinazione lineare di A, B, C, D.

Infine, la matrice E è combinazione lineare di A, B, C, D se $k \neq 1$.

b) Posto $k = 2$ risolviamo il sitema $Mx = b$:

$$\begin{cases} x + 2z + 3w = 0 \\ 2y + z = 0 \\ z = 0 \\ 2w = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \qquad E = -3A + B + D$$

□

Esercizio 0.5. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dagli elementi*

$$v_1 = (1, 1, 2, 1), \quad v_2 = (3, 0, 3, 0), \quad v_3 = (2, 1, 3, 1).$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = (-1, k, 2, k)$ appartiene a W.*

b) *Si determini se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.*

SOLUZIONE:

Per rispondere alla prima domanda dobbiamo stabilire se l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ ha soluzione, mentre per rispondere alla seconda domanda dobbiamo stabilire le soluzioni dell'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata alla prima equazione.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & -1 \\ 1 & 0 & 1 & | & k \\ 2 & 3 & 3 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-2I \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -1 & | & k+1 \\ 0 & -3 & -1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -1 & | & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3-k \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il sistema ha soluzione solo se $k = 3$, quindi v è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 per $k = 3$.

b) Se consideriamo solo la matrice dei coefficienti, associata all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$, vediamo che la matrice ha rango 2, quindi l'equazione ha infinite soluzioni e i tre vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti

□

Esercizio 0.6. *Cos'è un* gruppo*? Dare degli esempi di gruppo commutativo e di gruppo non commutativo.*