CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

I PROVA DI ACCERTAMENTO, FILA A – GEOMETRIA – 22/04/2008

Esercizio 0.1. *Si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni:*

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad r_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si verifichi che le due rette sono incidenti e se ne determini il punto P di intersezione.*
b) *Si trovi un'equazione parametrica della retta passante per P e ortogonale a r_1 e r_2.*

SOLUZIONE:

a) Mettiamo a sistema le due rette per determinarne il punto di intersezione:

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 2t \\ x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 2t \\ -1 + t + t = 0 \\ 2t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

Le rette si intersecano nel punto $P = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$.

b) Per determinare la direzione ortogonale a r_1 e r_2 determiniamo la direzione ortogonale al piano che contiene r_1 e r_2. In realtà è sufficiente determinare un piano parallelo a quello che contiene r_1 e r_2, quindi per semplificare i conti determiniamo il piano π passante per l'origine parallelo a r_1 e r_2. La retta r_1 ha equazione parametrica

$$r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

quindi r_1 e r_2 sono rispettivamente parallele ai vettori $(1, 1, 2)$ e $(1, -1, 0)$. Il piano π cercato ha quindi equazioni

$$\pi : \begin{cases} x = t + s \\ y = t - s \\ z = 2t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad x + y - z = 0$$

La retta passante per P ortogonale a r_1 e r_2 ha quindi direzione parallela a $(1, 1, -1)$:

$$r : \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 0.2. *Siano $A = (1, 2, 1)$, $B = (0, 2, -1)$, $C = (2, 1, 2)$ punti dello spazio.*

a) *Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C.*
b) *Stabilire se il punto $D = (1, 1, 1)$ appartiene al piano contenente A, B, C.*
c) *Eseiste un'isometria che trasforma i punti A, B, C nei punti $O = (0, 0, 0)$, $P = (1, 0, 2)$ e $Q = (1, 1, 1)$ rispettivamente?*

SOLUZIONE:

a) L'area del parallelogramma di lati AB e AC è data dalla lunghezza del vettore $AB \times AC$. Poiché $AB = (-1, 0, -2)$ e $AC = (1, -1, 1)$, otteniamo

$$AB \times AC = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -2i - j + k = (-2, -1, 1) \quad \Rightarrow \quad |AB \times AC| = \sqrt{6}.$$

Infine l'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma:

$$Area(ABC) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Un modo consiste nel determinare il piano passante per i tre punti $A,\ B,\ C$ il quale ha equazione

$$\pi : \begin{cases} x = -t + s \\ y = 2 - s \\ z = -1 - 2t + s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x + y - z = 3$$

Il punto D non soddisfa l'equazione di π: $2+1-1 \neq 3$, quindi D non appartiene al piano contenente A, B, C.

c) Un'isometria conserva le distanze, quindi in particolare deve essere $|BC| = |PQ|$. Nel nostro caso

$$|BC| = \sqrt{14} \neq |PQ| = \sqrt{2}$$

quindi non può esistere un'isometria che trasforma i punti B e C nei punti P e Q.

□

Esercizio 0.3. *Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con*

$$A = \begin{bmatrix} k-2 & 0 & k-1 & 2k-3 \\ 2k+1 & 1 & 0 & 2k \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ k+3 & k+2 & 0 & k \end{bmatrix} \quad k \text{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$.*
b) *Per i valori di k esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.*

Soluzione:

a) $N(A)$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$. Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; in particolare, per Rouchè-Capelli, ammette la sola soluzione nulla se $\text{rg}(A)$ è massimo. Nel nostro caso quindi $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $\text{rg}(A) = 4$. Determiniamo il rango di A calcolandone il deteminante:

$$\det(A) = (k-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 2k+1 & 1 & 2k \\ 0 & k-1 & 0 \\ k+3 & k+2 & k \end{bmatrix} = (k-1)^2 \cdot [(2k+1)k - 2k(k+3)] = -5k(k-1)^2$$

Infine $\text{rg}(A) = 4$ se $\det(A) \neq 0$, cioé $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $k \neq 0, 1$.

b) Se $k = 0$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) : \begin{cases} 2x + z + 3w = 0 \\ x + y = 0 \\ y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -3t \\ w = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(A) = \{(0,0,-3,1)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = 0$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(0,0,-3,1)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

Se $k = 1$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + 3I \\ \\ IV + 4I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - 3II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A) : \begin{cases} x + w = 0 \\ y - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = s \\ w = t \end{cases} \Rightarrow N(A) = \{(-1,1,0,1)t + (0,0,1,0)s \mid \forall s, t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = 1$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(-1,1,0,1),\ (0,0,1,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 2$.

□

Esercizio 0.4. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 = (1,0,2,1), \quad v_2 = (2,2,2,0), \quad v_3 = (0,k-1,k-1,0), \quad v_4 = (k+1,1,2k+1,2k+1),$$

dove k *è un parametro reale, e sia* $V = \langle v_1, v_2, v_2, v_4 \rangle$*.*

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *lo spazio* V *coincide con* $\mathbf{R}^4$*.*
b) *Si determini la dimensione e una base di* V *al variare di* k*.*

Soluzione:

a) Lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^4$ se $\dim(V) = 4$, cioè se il rango della matrice associata a v_1, v_2, v_3, v_4 è 4. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata ai quattro vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & k+1 \\ 0 & 2 & k-1 & 1 \\ 2 & 2 & k-1 & 2k+1 \\ 1 & 0 & 0 & 2k+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2I \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & k+1 \\ 0 & 2 & k-1 & 1 \\ 0 & -2 & k-1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \\ IV+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & k+1 \\ 0 & 2 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2k-2 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1/2III \\ IV-1/2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & k+1 \\ 0 & 2 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$$

I quattro vettori sono linearmente indipendenti e quindi $V = \mathbf{R}^4$ se $k \neq \pm 1$

b) Dalla matrice ridotta otteniamo direttamente:
   – Se $k \neq \pm 1$, $\dim(V) = 4$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (o anche la base canonica di R^4 per esempio).
   – Se $k = 1$, $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_4\}$.
   – Se $k = -1$, $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

□

Esercizio 0.5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca se* A, B *e* C *sono linearmente indipendenti.*
b) *Si determini una base dell'insieme* $\langle A, B, C \rangle$*.*

Soluzione:

a) Le matrici A, B, C sono linearmente indipendenti se l'equazione $xA + yB + zC = 0$ ha la sola soluzione $x = y = z = 0$. La matrice $xA + yB + zC$ è:

$$xA + yB + zC = \begin{bmatrix} 3x+2y+z & x+z \\ x-y+2z & 2x+2z \end{bmatrix},$$

quindi l'equazione $xA + yB + zC = 0$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 3x+2y+z = 0 \\ x+z = 0 \\ x-y+2z = 0 \\ 2x+2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II-I \\ III-II \\ IV-2II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni, quindi A, B e C sono linearmente dipendenti. Notiamo che $-tA + tB + tC = 0 \ \ \forall t \in \mathbf{R}$, quindi in particolare $C = A - B$.

b) Abbiamo appena osservato che C è linaremente dipendente da A e B. Viceversa le matrici A e B sono linearmente indipendenti in quanto non sono una multiplo dell'altra, quindi una base del sottospazio $\langle A, B, C \rangle$ è $\{A, B\}$.

□

Esercizio 0.6. *Siano* $v, w \in \mathbf{R}^n$ *vettori colonna. Dimostrare che la matrice* $A = vw^T \in M_n(\mathbf{R})$ *ha rango* 0 *oppure* 1.

Soluzione:

Siano $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $w^T = (w_1, w_2, \dots w_n)$, allora vw^T è una matrice $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & \dots & v_1w_n \\ v_2w_1 & v_2w_2 & \dots & v_2w_n \\ \dots \\ v_nw_1 & v_nw_2 & \dots & v_nw_n \end{bmatrix}$$

In sostanza ogni riga di A è un multiplo della riga formata da w^T. Se $v = 0$ o $w = 0$, allora anche la matrice A è nulla e $\text{rg}(A) = 0$, altrimenti A può essere ridotta nella matrice

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dove la riga ottenuta è non nulla, quindi se $v \neq 0$ e $w \neq 0$ la matrice $A = vw^T$ ha rango 1.

$\square$