GEOMETRIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA – 24/04/2007 – FILA A

Esercizio 0.1. *Si consideri il seguente sistema lineare*

$$\begin{cases} x + (2k+2)y - z = 4k+1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ 2x + (2k+4)y + (k-1)z = 6k+4 \end{cases}$$

con k parametro reale.

a) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema è compatibile distinguendo quando ammette una soluzione e infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente si risolva il sistema.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2k+2 & -1 & | & 4k+1 \\ 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 2 & 2k+4 & k-1 & | & 6k+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2II \\ I \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2k+2 & -1 & | & 4k+1 \\ 2 & 2k+4 & k-1 & | & 6k+4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2k & 0 & | & 4k \\ 0 & 2k & k+1 & | & 6k+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/2II \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2k & 0 & | & 4k \\ 0 & 0 & k+1 & | & 2k+2 \end{bmatrix}$$

a) Il sistema è sempre compatibile:
   – se $k \neq 0, -1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette una unica soluzione.
   – se $k = 0$ o $k = -1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni.
b) Torniamo al sistema distinguendo tre casi:
   – Se $k \neq 0, -1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ ky = 2k \\ (k+1)z = 2(k+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

   – Se $k = 0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$$

   – Se $k = -1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t - 3 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$$

□

Esercizio 0.2. *Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni:*

$$\pi_1 : \ 2x - y = 1, \qquad \pi_2 : \ x + y + z = 0, \qquad \pi_3 : \ x - 2z = 1.$$

a) *Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.*
b) *Si trovi il piano π_4 passante per l'origine e perpendicolare alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*
c) *Si determini l'area del triangolo di vertici A, B, C, con $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini il sistema associato ai tre piani

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \\ 0 & -1 & -3 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & -7 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y + 2z = -1 \\ -7z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \\ z = -\frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = A = \left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right).$$

b) Calcoliamo la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -\frac{1}{3}t + \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3}t - \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

La retta ha direzione $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$ cioè $(1, 2, -3)$, quindi un piano ortogonale a r ha equazione del tipo $x + 2y - 3z = d$. Imponendo il pasaggio per l'origine otteniamo $d = 0$. Infine il piano cercato è

$$\pi_4 : \ x + 2y - 3z = 0$$

c) Abbiamo già trovato A nel punto a). Analogamente mettiamo a sistema π_1, π_3 e π_4:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \\ z = -\frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = B = \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right).$$

Mettendo a sistema π_2, π_3 e π_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = C = \left(\frac{5}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right).$$

Di conseguenza

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right), \qquad \overrightarrow{BC} = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right). \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = -i + 2k$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} ||\,(-1,\ 0,\ 2)\,|| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

□

Esercizio 0.3. *Si consideri l'insieme*

$$S = \{\ (k+1, k+1, 0, 2k),\ (0, 2k, 0, 0),\ (1, 3k, 0, 1),\ (1, 5k, 1, k)\ \}.$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k l'insieme S è una base di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Posto $k = -1$ si trovino le coordinate del vettore $v = (1, 1, 0, 1)$ rispetto alla base trovata.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il determinante della matrice associata ai quattro vettori

$$\det \begin{bmatrix} k+1 & 0 & 1 & 1 \\ k+1 & 2k & 3k & 5k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2k & 0 & 1 & k \end{bmatrix} = 2k \cdot \det \begin{bmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2k & 1 & k \end{bmatrix}$$

$$= 2k \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} k+1 & 1 \\ 2k & 1 \end{bmatrix} = -2k(-k+1)$$

Se $k \neq 0, 1$ la matrice ha determinante diverso da zero, quindi rango 4 e i vettori formano una base di $\mathbf{R}^4$.

b) Riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 + wv_4 = v$ dove v_1, v_2, v_3, v_4 sono i vettori della base dopo avere posto $k = -1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ \\ I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + z - w = 1 \\ -2y - 3z - 5w = 1 \\ z + w = 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1 \\ w = 0 \end{cases}$$

Infine le coordinate di v rispetto alla base trovata sono

$$v = (0, -2, 1, 0)_S$$

□

Esercizio 0.4. *Si considerino i polinomi*

$$p_1(x) = 2x + x^2 - x^3,\ p_2(x) = 1 - x + x^2,\ p_3(x) = 3 + x - x^3,\ p_4(x) = x^2 + x^3$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_3[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = (x+1)^3$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)$.

Soluzione:

A ogni polinomio associamo il vettore formato dalle sue coordinate rispetto alla base canonica $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ di $\mathbf{R}_3[x]$:

$$p_1(x) \rightarrow p_1 = (0, 2, 1, -1) \qquad p_2(x) \rightarrow p_2 = (1, -1, 1, 0)$$
$$p_3(x) \rightarrow p_3 = (3, 1, 0, -1) \qquad p_4(x) \rightarrow p_4 = (0, 0, 1, 1)$$

I quattro polinomi formano una base di $\mathbf{R}_3[x]$ sse i quattro vettori $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ formano una base di $\mathbf{R}^4$. Inoltre associamo al polinomio $f(x)$ il corrispondente vettore:

$$f(x) = (x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \rightarrow f = (1, 3, 3, 1)$$

Per rispondere alla domanda b) dobbiamo quindi risolvere l'equazione $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = f$.

Per rispondere a entrambe le domande consideriamo quindi la matrice associata ai cinque vettori:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ I \\ II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & | & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 2I \\ IV + I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + 3II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/2III \\ 5IV + 2III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & | & 15 \end{bmatrix}$$

a) Il rango della matrice associata a p_1, p_2, p_3, p_4 è quattro, quindi i quattro vettori sono linearmente indipendenti e l'insieme $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)\}$ è una base di $\mathbf{R}_3[x]$.
b) Tornando al sistema otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_4 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_3 = \dfrac{1}{2} \\ x_4 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = p_1(x) - \frac{1}{2}p_2(x) + \frac{1}{2}p_3(x) + \frac{5}{2}p_4(x)$$

□

Esercizio 0.5. *Siano* U *e* V *i sottospazi di* $\mathbf{R}^3$ *così definiti*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle (1, -1, 0),\ (1, 1, -1) \rangle$$

a) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi* U *e* V.

b) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi $U+V$ e $U \cap V$.*

Soluzione:

a) Esplicitiamo U:

$$x+z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=s \\ z=t \end{cases} \quad \Rightarrow U = \{(-t,\ s,\ t) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (-1,0,1),\ u_2 = (0,1,0)\} \qquad \dim(U) = 2$$

Analogamente determiniamo una base di V stabilendo se i due generatori sono linearmente indipendenti. Senza la necessità di fare calcoli notiamo che i due generatori non sono uno multiplo dell'altro, quindi sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (1,-1,0),\ v_2 = (1,-1,1)\}, \qquad \dim(V) = 2$$

b) Lo spazio $U+V$ è lo spazio generato dai generatori (linearmente indipendenti) dei due spazi

$$U+V = \langle u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2 \rangle$$

Consideriamo quindi la matrice associata ai quattro vettori

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(U+V) = \operatorname{rg}(A) = 3$ e

$$\mathcal{B}(U+V) = \{u_1 = (-1,0,1),\ u_2 = (0,1,0),\ v_1 = (1,-1,0)\}$$

Usando la formula di Grassman otteniamo che

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 1$$

Per determinare una base di $U \cap V$, ricordando che $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$, possiamo scrivere

$$V = \{v = (av_1 + bv_2) \mid a,b \in \mathbf{R}\} = \{v = (a+b,\ -a-b,\ b) \mid a,b \in \mathbf{R}\}$$

Ora si tratta di vedere quali di questi vettori appartengono a U. Poiché

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+z=0\}$$

possiamo imporre la condizione $x+z=0$ al generico vettore v di V:

$$a+b+b=0 \ \Rightarrow\ a=-2b$$

Quindi $v \in U$ sse $a=-2b$, ovvero i vettori di V che appartengono anche a U sono del tipo:

$$(-b,\ b,\ b) = (-1,1,1)b, \qquad a \in \mathbf{R}$$

Infine

$$U \cap V = \langle (-1,1,1) \rangle \qquad \mathcal{B}(U \cap V) = \{(-1,1,1)\}$$

Notiamo che $\dim(U \cap V) = 1$ come ci aspettavamo.

□