CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

I PROVA INTERMEDIA - 18/04/06 - FILA A

A.A. 2005/06

Esercizio 1.1. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} -x+2y+3z = k+3 \\ -2x+6y+(k+7)z = 2k+9 \\ x-4y-2z = k-2 \\ 3x-6y+(k-7)z = k^2-k-9 \end{cases} \qquad \text{(}k \text{ parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione e per quali k ne ammette infinite.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema.*

SOLUZIONE:
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ -2 & 6 & k+7 & | & 2k+9 \\ 1 & -4 & -2 & | & k-2 \\ 3 & -6 & k-7 & | & k^2-k-9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ II-2I \\ III+I \\ IV+3I \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & -2 & 1 & | & 2k+1 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ III+II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV-III \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-4 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $k^2-4=0$ se $k=\pm 2$, e che $k+2=0$ se $k=-2$. Di conseguenza:
   – Se $k \neq \pm 2$ allora $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$ quindi il sistema non ammette soluzione.
   – Se $k = 2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema ammette una unica soluzione.
   – Se $k = -2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $k = 2$:

$$\begin{cases} -x+2y+3z = 5 \\ 2y+3z = 3 \\ 4z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Consideriamo il caso $k = -2$:

$$\begin{cases} -x+2y+3z = 1 \\ 2y-z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8t-10 \\ y = t \\ z = 2t-3 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

.

□

Esercizio 1.2. *Si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$r_1 \ : \ x = 3t+1, \ y = -t, \ z = 3t+1$$
$$r_2 \ : \ x = s, \ y = 2, \ z = s$$
$$r_3 \ : \ x-1 = z = 0$$

a) *Si determini un'equazione del piano π contenente le rette r_1 e r_2.*
b) *Si stabilisca se il piano π contiene r_3.*

c) *Si calcoli la proiezione ortogonale del punto $P(1,2,0)$ sul piano π_1.*

Soluzione:

a) Notiamo che r_1 ha direzione $(3,-1,3)$ e r_2 ha direzione $(1,0,1)$. Le due rette sono comunque complanari in quanto si intersecano:

$$\begin{cases} 3t+1=s \\ -t=2 \\ 3t+1=s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=-5 \\ t=-2 \end{cases} \Rightarrow r_1\cap r_2 = A(-5,2,-5)$$

Quindi il piano cercato ha equazioni:

$$\pi: \begin{cases} x=-5+3t+s \\ y=2-t \\ z=-5+3t+s \end{cases} \Rightarrow x-z=0$$

b) Un modo per verificare se π contiene r_3 è di controllare se π contiene due qualsiasi punti di r_3. Dall'equazione di r_3 otteniamo per esempio i punti $B(1,0,0)$ e $C(1,1,0)$ di r_3. Quindi π contiene B e C se:

$$\begin{aligned} 1-0=0 \\ 1-0=0 \end{aligned}$$

Siccome le condizioni non sono verificate B e C, e di conseguenza r_3, non sono contenuti in π.

c) Determiniamo la retta s per P ortogonale a π, cioè di direzione $(1,0,-1)$:

$$s: \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=-t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano π è quindi l'intersezione di s con π:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=-t \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=-t \\ 1+t+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \\ z=\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $D\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right)$.

□

Esercizio 1.3. *Sia $V=\langle\, v_1,\ v_2,\ v_3\,\rangle$ con*

$$v_1=(k+3,\ k+3,\ 0), \qquad v_2=(0,\ 3,\ k+2), \qquad v_3=(0,\ 3k,\ k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di $k\in\mathbf{R}$ lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$.*
b) *Si determini la dimensione una base di V al variare di $k\in\mathbf{R}$.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice A associata ai tre vettori:

$$A=\begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ k+3 & 3 & 3k \\ 0 & k+2 & k \end{bmatrix}$$

a) Lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$ se $\dim(V) = 3$, cioè se $\mathrm{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$. Calcoliamo quindi il determinante di A che è immediato sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\det(A) = (k+3)[3k - 3k(k+2)] = 3k(k+3)(-k-1)$$

Quindi se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti e $V = \mathbf{R}^3$.

b) Abbiamo già osservato che se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$. Inoltre:
   – Se $k = 0$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.
   – Se $k = -1$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e una possibile base è $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.
   – Se $k = -3$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_2,\ v_3\}$.

$\square$

Esercizio 1.4. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k-1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca per quale valore di $k \in \mathbf{R}$ le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti.*
b) *Per il valore trovato in* a) *esprimere B come combinazione lineare di A e C.*

Soluzione:

a) Per stabilire quando le tre matrici sono linearmente dipendenti risolviamo l'equazione $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} x + 2y & x + (k+1)y + z \\ 2x + 4y + (2k-2)z & -x + (k-3)y + (2k-1)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + (k+1)y + z = 0 \\ 2x + 4y + (2k-2)z = 0 \\ -x + (k-3)y + (2k-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2k-2 & 0 \\ -1 & k-3 & 2k-1 & 0 \end{array}\right]$$

Notiamo che le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti se il sistema ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla $x = y = z = 0$, ovvero se la matrice dei coefficienti del sistema ha rango minore di 3. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{array}{r} \\ II-I \\ III-2I \\ IV+I \end{array}\begin{bmatrix}1&2&0&|&0\\0&k-1&1&|&0\\0&0&2k-2&|&0\\0&k-1&2k-1&|&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV-II \end{array}\begin{bmatrix}1&2&0&|&0\\0&k-1&1&|&0\\0&0&2k-2&|&0\\0&0&2k-2&|&0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix}1&2&0&|&0\\0&k-1&1&|&0\\0&0&2k-2&|&0\\0&0&0&|&0\end{bmatrix}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

– Se $k \neq 1$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti.
– Se $k = 1$ la matrice dei cofficienti ha rango $2 < 3$, quindi il sistema ha infinite soluzioni e le tre matrici sono linearmente dipendenti.

b) Risolvendo con $k = 1$ il sistema impostato al punto precedente otteniamo:

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \ -2t\cdot A + t\cdot B + 0\cdot C = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Ponendo per esempio $t = 1$ otteniamo $-2A + B = 0$, ovvero $B = 2A$.

□

Esercizio 1.5. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:

Notiamo che

$$v = a_1(2,1,1,1,0) + a_2(1,-1,-1,3,1) + a_3(0,-3,0,1,0).$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2,1,1,1,0), \quad v_2 = (1,-1,-1,3,0), \quad v_3 = (0,-3,0,1,0).$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^5$).

b) Si tratta di stabilire quali vettori tra v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Consideriamo quindi la matrice associata a v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\1&-1&-3\\1&-1&0\\1&3&1\\0&1&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 2II-I \\ III-II \\ IV-II \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-3&-6\\0&0&3\\0&4&4\\0&1&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ 3IV+4II \\ 3V+II \end{array}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-3&-6\\0&0&3\\0&0&-12\\0&0&-6\end{bmatrix}$$

Anche senza ridurre completamente la matrice si vede che questa ha rango tre, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di S:

$$\mathcal{B}(S) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

□

Esercizio 1.6. *Si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: 3x + y - 1 = 4x + y - z - 1 = 0 \\ r_2 &: 2x - y + z = x - y + 2z = 0 \\ r_3 &: x - z = y + z = 0 \end{aligned}$$

a) *Mostrare che le tre rette sono complanari.*
b) *Calcolare l'area del triangolo determinate dalle tre rette.*

SOLUZIONE:

a) Tenendo anche conto del punto b) dell'esercizio per verificare che le tre rette sono complanari determiniamo i loro punti di intersezione a due a due.

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$$

$$r_1 \cap r_3 : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y - z = 1 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$r_2 \cap r_3 : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0, 0, 0)$$

Il piano passante per A, B e C contiene le tre rette che sono quindi complanari.

b) Calcoliamo i due vettori che formano due lati del triangolo: $\overrightarrow{CA} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ e $\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, quindi

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}i - \frac{1}{3}k$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

□