CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

I PROVA INTERMEDIA - 18/04/06 - FILA A

A.A. 2005/06

Esercizio 1.1. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} -x+2y+3z=k+3 \\ -2x+6y+(k+7)z=2k+9 \\ x-4y-2z=k-2 \\ 3x-6y+(k-7)z=k^2-k-9 \end{cases} \qquad \text{(k parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione e per quali k ne ammette infinite.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ -2 & 6 & k+7 & | & 2k+9 \\ 1 & -4 & -2 & | & k-2 \\ 3 & -6 & k-7 & | & k^2-k-9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+I \\ IV+3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & -2 & 1 & | & 2k+1 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$III+II \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-4 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $k^2-4=0$ se $k=\pm 2$, e che $k+2=0$ se $k=-2$. Di conseguenza:
   - Se $k \neq \pm 2$ allora $\text{rg}(A)=3<\text{rg}(A|b)=4$ quindi il sistema non ammette soluzione.
   - Se $k=2$ allora $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|b)=3$ quindi il sistema ammette una unica soluzione.
   - Se $k=-2$ allora $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|b)=2$ quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $k=2$:

$$\begin{cases} -x+2y+3z=5 \\ 2y+3z=3 \\ 4z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{3}{2} \\ z=2 \end{cases}$$

Consideriamo il caso $k=-2$:

$$\begin{cases} -x+2y+3z=1 \\ 2y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8t-10 \\ y=t \\ z=2t-3 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

.

□

Esercizio 1.2. *Si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: x=3t+1,\ y=-t,\ z=3t+1 \\ r_2 &: x=s,\ y=2,\ z=s \\ r_3 &: x-1=z=0 \end{aligned}$$

a) *Si determini un'equazione del piano π contenente le rette r_1 e r_2.*
b) *Si stabilisca se il piano π contiene r_3.*

c) *Si calcoli la proiezione ortogonale del punto* $P(1, 2, 0)$ *sul piano* π_1.

SOLUZIONE:

a) Notiamo che r_1 ha direzione $(3, -1, 3)$ e r_2 ha direzione $(1, 0, 1)$. Le due rette sono comunque complanari in quanto si intersecano:

$$\begin{cases} 3t + 1 = s \\ -t = 2 \\ 3t + 1 = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -5 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow r_1 \cap r_2 = A(-5, 2, -5)$$

Quindi il piano cercato ha equazioni:

$$\pi : \begin{cases} x = -5 + 3t + s \\ y = 2 - t \\ z = -5 + 3t + s \end{cases} \Rightarrow x - z = 0$$

b) Un modo per verificare se π contiene r_3 è di controllare se π contiene due qualsiasi punti di r_3. Dall'equazione di r_3 otteniamo per esempio i punti $B(1, 0, 0)$ e $C(1, 1, 0)$ di r_3. Quindi π contiene B e C se:

$$1 - 0 = 0$$
$$1 - 0 = 0$$

Siccome le condizioni non sono verificate B e C, e di conseguenza r_3, non sono contenuti in π.

c) Determiniamo la retta s per P ortogonale a π, cioè di direzione $(1, 0, -1)$:

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano π è quindi l'intersezione di s con π:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -t \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -t \\ 1 + t + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \\ z = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $D\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$.

□

Esercizio 1.3. *Sia* $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3\ \rangle$ *con*

$$v_1 = (k + 3,\ k + 3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k + 2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* $k \in \mathbf{R}$ *lo spazio* V *coincide con* $\mathbf{R}^3$.

b) *Si determini la dimensione una base di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

SOLUZIONE:

Consideriamo la matrice A associata ai tre vettori:

$$A = \begin{bmatrix} k + 3 & 0 & 0 \\ k + 3 & 3 & 3k \\ 0 & k + 2 & k \end{bmatrix}$$

a) Lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$ se $\dim(V) = 3$, cioè se $\text{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$. Calcoliamo quindi il determinante di A che è immediato sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\det(A) = (k+3)[3k - 3k(k+2)] = 3k(k+3)(-k-1)$$

Quindi se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti e $V = \mathbf{R}^3$.

b) Abbiamo già osservato che se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$. Inoltre:
- Se $k = 0$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.
- Se $k = -1$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(V) = 2$ e una possibile base è $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.
- Se $k = -3$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_2,\ v_3\}$.

$\square$

Esercizio 1.4. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k-1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca per quale valore di $k \in \mathbf{R}$ le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti.*
b) *Per il valore trovato in* a) *esprimere B come combinazione lineare di A e C.*

Soluzione:

a) Per stabilire quando le tre matrici sono linearmente dipendenti risolviamo l'equazione $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} x + 2y & x + (k+1)y + z \\ 2x + 4y + (2k-2)z & -x + (k-3)y + (2k-1)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + (k+1)y + z = 0 \\ 2x + 4y + (2k-2)z = 0 \\ -x + (k-3)y + (2k-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2k-2 & | & 0 \\ -1 & k-3 & 2k-1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti se il sistema ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla $x = y = z = 0$, ovvero se la matrice dei coefficienti del sistema ha rango minore di 3. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{array}{r} \\ II-I \\ III-2I \\ IV+I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 2k-1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

- Se $k \neq 1$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti.
- Se $k = 1$ la matrice dei cofficienti ha rango $2 < 3$, quindi il sistema ha infinite soluzioni e le tre matrici sono linearmente dipendenti.

b) Risolvendo con $k = 1$ il sistema impostato al punto precedente otteniamo:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \; -2t \cdot A + t \cdot B + 0 \cdot C = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Ponendo per esempio $t = 1$ otteniamo $-2A + B = 0$, ovvero $B = 2A$.

□

Esercizio 1.5. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*

b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:

Notiamo che

$$v = a_1(2, 1, 1, 1, 0) + a_2(1, -1, -1, 3, 1) + a_3(0, -3, 0, 1, 0).$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2, 1, 1, 1, 0), \quad v_2 = (1, -1, -1, 3, 0), \quad v_3 = (0, -3, 0, 1, 0).$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^5$).

b) Si tratta di stabilire quali vettori tra v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Consideriamo quindi la matrice associata a v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 2II-I \\ III-II \\ IV-II \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ 3IV+4II \\ 3V+II \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Anche senza ridurre completamente la matrice si vede che questa ha rango tre, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di S:

$$\mathcal{B}(S) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

□

Esercizio 1.6. *Si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: 3x+y-1 = 4x+y-z-1 = 0 \\ r_2 &: 2x-y+z = x-y+2z = 0 \\ r_3 &: x-z = y+z = 0 \end{aligned}$$

a) *Mostrare che le tre rette sono complanari.*
b) *Calcolare l'area del triangolo determinate dalle tre rette.*

Soluzione:

a) Tenendo anche conto del punto b) dell'esercizio per verificare che le tre rette sono complanari determiniamo i loro punti di intersezione a due a due.

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} 3x+y=1 \\ 4x+y-z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$$

$$r_1 \cap r_3 : \begin{cases} 3x+y=1 \\ 4x+y-z=1 \\ x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$r_2 \cap r_3 : \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow C(0,0,0)$$

Il piano passante per A, B e C contiene le tre rette che sono quindi complanari.

b) Calcoliamo i due vettori che formano due lati del triangolo: $\overrightarrow{CA} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ e $\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, quindi

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}i - \frac{1}{3}k$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

□