I PROVA DI ACCERTAMENTO - 26/04/2005 – A

A.A. 2004/05

Esercizio 1.1. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} (1+k)x = 0 \\ ky + z + w = 2 \\ x + kz + 2w = k \\ x + kw = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k & 2 & | & k \\ 1 & 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k & 2 & | & k \\ 1+k & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I \\ IV - (1+k)I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & k & 2-k & | & k \\ 0 & 0 & 0 & -k(1+k) & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$, cioè se $k \neq 0, -1$.
b) Torniamo al sistema nel caso $k = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z + w = 2 \\ 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \\ w = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 1.2. *Sia r la retta nello spazio di equazioni cartesiane $x+z+1 = 2x+2y-z-3 = 0$ e sia l la retta di equazioni parametriche $x = 2t,\ y = -t,\ z = 0$.*

a) *Determinare una equazione cartesiana del piano π contenente il punto $P(1,2,3)$ e ortogonale alla retta l.*
b) *Stabilire se esiste una retta passante per P, contenuta in π ed incidente la retta r. In caso affermativo determinare equazioni di tale retta.*

Soluzione:

a) La retta l ha direzione $(2,-1,0)$, quindi il piano ortogonale a l ha equazione del tipo $2x - y = d$. Imponendo il passaggio per il punto P si ottiene $2 - 2 = d$, quindi $d = 0$ e

$$\pi : \qquad 2x - y = 0$$

b) Il punto P appartiene a π; se la retta r interseca π in un punto A, la retta passante per A e P è la retta cercata. Determiniamo quindi l'eventuale intersezione tra r e π:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = -1 \\ 2x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + z = -1 \\ 6x - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + z = -1 \\ 7x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{9}{7}\right)$$

Determiniamo quindi il vettore direzione $\overrightarrow{AP}$

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{30}{7}\right) \quad \text{parallelo a} \quad (1, 2, 6)$$

Infine la retta cercata ha equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 6t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x - z = 3 \end{cases}$$

□

Esercizio 1.3. *Sia*

$$S = \{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 - 4x_2 - x_3 + 2kx_4 = k + 1,\ 2x_1 - kx_3 + kx_4 = 2k + 2,\ 3x_1 - 4kx_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0\ \}$$

a) *Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Le soluzioni di un sistema omogeneo formano uno spazio vettoriale sse il sistema è omogeneo:

$$\begin{cases} k + 1 = 0 \\ 2k + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -1$$

b) Cerchiamo le soluzioni del sistema nel caso $k = -1$ riducendo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 2I \\ III - 3I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 12 & 9 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - 2II \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}t \\ x_2 = \frac{3}{8}t \\ x_3 = t \\ x_4 = -2t \end{cases} \quad \forall\ t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow S = \left\{\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, 1, -2\right) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\right\}$$

Infine

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, -2, 1 \right) \right\}, \qquad \dim(S) = 1$$

□

Esercizio 1.4. *Sia*

$$V = \langle\ (1,1,2,-1),\ (2,k+3,4,-2),\ (0,1,1,k^2-1)\ \rangle$$

con k parametro reale.

a) *Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_4 = (3,3,k+6,-3)$ appartiene a V.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A formata dai tre vettori v_1, v_2 e v_3, affiancata dalla colonna dei termini noti formata dal vettore v_4 (in modo da risolvere anche l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 1 & k+3 & 1 & | & 3 \\ 2 & 4 & 1 & | & k+6 \\ -1 & -2 & k^2-1 & | & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & k^2-1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ IV - (k^2-1)III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & | & -k(k^2-1) \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice A.
   – Se $k \neq -1$ allora $\text{rg}(A) = 3 = \dim(V)$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.
   – Se $k = -1$ allora $\text{rg}(A) = -1 = \dim(V)$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_3\}$.
b) v_4 appartiene a V se il sistema associato all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione, ovvero se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.
   Notiamo che $-k(k^2-1) = 0$ se $k = 0, \pm 1$. Quindi
   – Se $k = 0, 1$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 appartiene a V.
   – Se $k = -1$, allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 non appartiene a V.
   – Se $k \neq 0, \pm 1$, allora $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$ e v_4 non appartiene a V.

□

Esercizio 1.5. *Si considerino i polinomi $p_1 = x^2 + ax + b + c$, $p_2 = x^2 + bx + a + c$, $p_3 = x^2 + cx + a + b$.*

a) *Mostrare che per ogni valore dei parametri a, b, c i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi $\mathbf{R}[x]$.*
b) *Calcolare la dimensione dello spazio $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ al variare di a, b, c.*

Soluzione:

Associamo ad ogni polinomio il vattore che esprime le sue componenti rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}[x]$:

$$p_1 = (1, a, b+c), \qquad p_2 = (1, b, a+c), \qquad p_3 = (1, c, a+b)$$

Possiamo quindi svolgere l'esercizio lavorando sui tre vettori.

Consideriamo la matrice associata ai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-aI \\ III-(b+c)I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & a-b & a-c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata ai tre vettori ha sempre rango minore di tre, quindi i tre vettori e i tre polinomi sono linearmente dipendenti.
b) Dal punto a) sappiamo che $\langle p_1, p_2, p_3\rangle$ ha sicuramente dimensione minore di tre. Inoltre
   - Se $a = b = c$, allora la matrice ha rango 1 e $\langle p_1, p_2, p_3\rangle$ ha dimensione 1.
   - Se $a \neq b$ o $a \neq c$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3\rangle$ ha dimensione 2.

$\square$

Esercizio 1.6. *Siano* $P_1 = (1,-1,0), P_2 = (1,0,-1), P_3 = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, *e* $P_4 = (1,2,1)$ *quattro punti nello spazio.*
a) *Calcolare l'angolo tra i vettori* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *e* $\overrightarrow{P_2P_3}$.
b) *Mediante il determinante, calcolare il volume del prisma con base il triangolo* $P_1P_2P_3$ *e lato il segmento* P_1P_4.

Soluzione:

a) Sia ϑ l'angolo cercato, usiamo la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3})}{|\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\overrightarrow{P_2P_3}|}$$

Poichè

$$\overrightarrow{P_2P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_2} = (0,1,-1),$$

si ha

$$(\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_2P_3}) = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

Quindi $\cos(\vartheta) = 0$ e $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Il volume del tetraedo é metà del volume del parallelepipedo di lati $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P_4}$.
Poichè

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = (0,3,1)$$

otteniamo

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 1-\frac{1}{\sqrt{3}} & -1-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{8}{\sqrt{3}} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$\square$