CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

GEOMETRIA – II PROVA DI ACCERTAMENTO – A – 15/6/2010

Esercizio 1.1. *Si consideri la base* $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,1,0)\}$ *di* $\mathbf{R}^4$ *e sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^4$. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *la funzione lineare con matrice associata*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con k *parametro reale.*

a) *Stabilire per quali valori di* k *la funzione* T *è un isomorfismo (cioè iniettiva e suriettiva).*
b) *Posto* $k = 1$, *si trovi una base del sottospazio* $T^{-1}(W) = \{v \in \mathbf{R}^4 \mid T(v) \in W\}$, *con* $W = \langle (1,0,0,1),(0,1,0,1) \rangle$.

SOLUZIONE:

a) T è un isomorfismo se il rango di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ è 4, infatti in tale caso $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 4$ e T è suriettiva, e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 4 = 0$ e T è iniettiva. In questo caso è probabilmente più rapido calcolare il determinante di M, sviluppando rispeto alla terza colonna:

$$\det\left((M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)\right) = 1 \cdot k \cdot 1 = k$$

Quindi T è un isomorfismo se $k \neq 0$ quando il rango di M è 4.

b) La matrice associata a T per $k = 1$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo procedere in due modi:

– MODO 1. Esprimiamo i due vettori $w_1 = (1,0,0,1)$ e $w_2 = (0,1,0,1)$ come combinazione lineare delle immagini della base $\mathcal{B}$ risolvendo i due sistemi $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)|w_1$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)|w_2$. Riduciamo a gradini le due matrici contemporaneamente:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ IV - I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Risolviamo il primo sistema $xT(v_1) + yT(v_2) + zT(v_3) + wT(v_4) = w_1$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z + w = 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow T^{-1}(w_1) = (1,-1,1,0)_{\mathcal{B}} = (1,0,0,1)$$

Risolviamo il secondo sistema $xT(v_1) + yT(v_2) + zT(v_3) + wT(v_4) = w_2$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z + w = -1 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -2 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow T^{-1}(w_2) = (0,1,-2,1)_{\mathcal{B}} = (1,1,0,-2)$$

– MODO 2.Essendo T un isomorfismo possiamo calcolare l'inversa di $M(T)$:

$$\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)\right)^{-1} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$T^{-1}(w_1) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1}) \cdot w_1^T = (1, -1, 1, 0)_{\mathcal{B}} = (1, 0, 0, 1)$$
$$T^{-1}(w_2) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1}) \cdot w_2^T = (0, 1, -2, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 1, 0, -2)$$

□

Esercizio 1.2. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso positivo, determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*
b) *Determinare, se esistono, i valori di k per cui la matrice*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & k+1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

può essere associata al medesimo endomorfismo T.

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, quindi T ha l'autovalore $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$, singolo.

Per stabilire se T è diagonalizzabile cominciamo a calcolare l'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I) : \begin{bmatrix} -6 & -1 & 3 \\ -6 & -1 & 3 \\ -12 & -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -6x - y + 3z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -6t + 3s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(2) = \langle\ (1, -6, 0),\ (0, 3, 1)\rangle$$

A questo punto possiamo già dire che T è diagonalizzabile.

Determiniamo l'autospazio $E(1)$:

$$E(1) = \mathrm{N}(A - I) : \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -6 & 0 & 3 \\ -12 & -2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -1/3 II \\ I \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II + 5III \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1, 1, 2)\rangle$$

Infine la matrice P diagonalizzante (formata da una base di autovettori) è

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Dal momento che A è diagonalizzabile con autovalori $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$, singolo, A e B sono associate allo stesso endomorfismo T se anche B ha le stesse caratteristiche. Calcoliamo quindi il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(k - \lambda)$$

quindi A e B hanno gli stessi autovalori se $k = 2$. Dobbiamo ora verificare che, per $k = 2$, anche B sia diagonalizzabile, ovvero che $\lambda = 2$ abbia molteplicità geometrica 2:

$$E_B(2) = \mathrm{N}(B - 2I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

La molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 1, quindi B non è diagonalizzabile e A e B non sono associate al medesimo endomorfismo T per nessun valore di k.

□

Esercizio 1.3. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_2 + 2x_4, x_1, 2x_2 + x_4)$$

a) *Mostrare che T è diagonalizzabile.*
b) *Se esiste, trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T?*

Soluzione:
La matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$ è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) T è simmetrica, quindi è sicuramente diagonalizzabile.
b) Essendo T simmetrica esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T. Calcoliamo il polinomio caratteristico di T:

$$\begin{aligned} p_M(\lambda) &= (-\lambda)^2[(1-\lambda)^2 - 4] + 1(-1)[(1-\lambda)^2 - 4] = \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3) - 1(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda - 3)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

T ha autovalori $\lambda = -1$, doppio, $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$, singoli. Calcoliamo i tre autospazi:

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(1) = \langle\ (1, 0, 1, 0)\ \rangle = \langle\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\ \rangle$$

Analogamente

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/2II \\ 3III + I \\ IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(3) = \langle\ (0, 1, 0, 1)\ \rangle = \langle\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \rangle$$

Infine

$$E(-1) = N(M + I) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -t \\ w = -s \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(1) = \langle\ (1, 0, -1, 0),\ (0, 1, 0, -1)\ \rangle$$

Notiamo che i due vettori di $E(-1)$ trovati sono ortogonali tra loro, quindi è sufficiente normalizzarli:

$$E(-1) = \langle\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle$$

Infine una base ortonormale formata da autovettori cercata è:

$$\mathcal{B} = \left\{\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}.$$

□

Esercizio 1.4. *Sia $\mathbf{C}$ la conica di equazione*

$$\mathbf{C}\ :\ 6x^2 + 4xy + 9y^2 - 5x + 10y = 0.$$

a) *Stabilire il tipo di conica e la forma canonica di* $\mathbf{C}$.
b) *Trovare equazioni degli assi di simmetria di* $\mathbf{C}$.

Soluzione:

a) Le matrici associate alla conica sono

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 9 & 5 \\ -\frac{5}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:

– $I_3 = \det(\tilde{A}) = -\dfrac{1025}{4}$, e si tratta di una conica non degenere.
– $p_A(\lambda) = (6-\lambda)(9-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 5$, concordi, e si tratta di un'ellisse.
– Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 + 5y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(\tilde{A})$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(\tilde{A}) = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-\frac{1025}{4} = 50t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{41}{8}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$10x^2 + 5y^2 - \frac{41}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{80}{41}x^2 + \frac{40}{41}y^2 - 1 = 0$$

Notiamo che si tratta di un ellisse reale.

b) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & | & \frac{5}{2} \\ 2 & 9 & | & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{3II-I}{} \begin{bmatrix} 6 & 2 & | & \frac{5}{2} \\ 0 & 25 & | & -\frac{35}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{20} \\ y = -\frac{7}{10} \end{cases} \quad \Rightarrow \; C\left(\frac{13}{20}, -\frac{7}{10}\right)$$

Calcoliamo gli autospazi di A:

$$E(10) = N(A - 10I): \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x - y = 0$$

$$E(5) = N(A - 5I): \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$$

Infine gli assi hanno la direzione degli autovettori e passano per il centro C:

$$a_1: \; 2x - y = 2 \qquad\qquad a_2: \; x + 2y = -\frac{3}{4}$$

□

Esercizio 1.5. *Cos'è un* autovettore *di una funzione lineare? Dopo averne dato la definizione, dare un esempio di autovettore di una funzione definita sullo spazio* $\mathbf{R}^3$.