

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA**

II PROVA DI ACCERTAMENTO, FILA A - GEOMETRIA - 19/06/2008

**Esercizio 0.1.** Si consideri il seguente endomorfismo di  $\mathbf{R}^4$

$$T(x, y, z, w) = (x + 2y + 2z + w, y + z, x + y + z + (k + 1)w, -x + y + z + (2k - 2)w)$$

con  $k$  parametro reale.

- a) Si determinino basi di immagine e nucleo di  $T$  al variare di  $k$ .
- b) Si stabilisca, al variare di  $k$ , se il vettore  $v = (0, 0, 1, 1)$  appartiene all'immagine di  $T$ .

SOLUZIONE:

Consideriamo la matrice  $M(T)$  associata a  $T$  rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k+1 \\ -1 & 1 & 1 & 2k-2 \end{bmatrix}$$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo  $M(T)$  a gradini, affiancondola alla colonna data dal vettore  $v$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k+1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2k-2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} III - I \\ IV + I \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & k & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2k-1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ & \begin{array}{l} III + II \\ IV - 3II \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} III + II \\ IV - 2III \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Anche senza completare la riduzione possiamo rispondere ad entrambe le domande.

- a) La matrice  $M(T)$  ha rango 3 per ogni valore di  $k$ , inoltre una base dell'immagine è data da:

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{ (1, 0, 1, -1), (2, 1, 1, 1), (1, 0, k + 1, 2k - 2) \}$$

Per determinare il nucleo di  $T$  risolviamo il sistema omogeneo associato a  $T$ :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + w = 0 \\ y + z = 0 \\ kw = 0 \\ -w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -t \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\ker(T)) = \{ (0, 1, -1, 0) \}$$

- b) Consideriamo il sistema  $M(T)|v$ .

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + w = 0 \\ y + z = 0 \\ kw = 1 \\ -w = -1 \end{cases}$$

Notiamo che dalle ultime due equazioni ricaviamo la condizione  $k \neq 1$ . In questo caso otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + w = 0 \\ y + z = 0 \\ w = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione. Quindi  $v \in \text{Im}(T)$  se  $k = 1$ .

□

**Esercizio 0.2.** Si consideri la funzione lineare  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e sia  $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)\}$  una base di  $\mathbf{R}^3$ .

- a) Si determini la matrice  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$  associata a  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  nel dominio e rispetto alla base canonica  $\mathcal{E}$  nel codominio.  
 b) Si determini la matrice  $M_{\mathcal{B}}(T)$  associata a  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

SOLUZIONE:

- a) La matrice  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$  ha per colonne le immagini dei vettori della base  $\mathcal{B}$ , espresse rispetto alla base canonica. Calcoliamo quindi le immagini dei vettori  $v_i$ , utilizzando la matrice  $M(T)$ :

$$M(T) \cdot v_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_1) = (1, 0, 4)$$

$$M(T) \cdot v_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_2) = (4, 1, 5)$$

$$M(T) \cdot v_3^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_3) = (4, 0, 3)$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- b) La matrice  $M_{\mathcal{B}}(T)$  ha per colonne le immagini dei vettori della base  $\mathcal{B}$ , espresse rispetto alla base  $\mathcal{B}$ . Dobbiamo quindi esprimere rispetto alla base  $\mathcal{B}$  i vettori  $T(v_i)$ , trovati al punto precedente. Si tratta di risolvere i tre sistemi  $xv_i + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$  per  $i = 1, 2, 3$ . Per comodità riduciamo a gradini i tre sistemi contemporaneamente, affiancando direttamente le tre colonne dei termini noti:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} I - III \\ II - I \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right]$$

Di conseguenza

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1) \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ -z = -1 \\ y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_1) = -3v_1 + 3v_2 + v_3 = (-3, 3, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -z = -3 \\ y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_2) = -v_1 + 2v_2 + 3v_3 = (-1, 2, 3)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -z = -4 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_3) = v_1 - v_2 + 4v_3 = (1, -1, 4)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice associata a  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  è

$$M(T)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 0.3.** Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -4 & k & -4 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

con  $k$  parametro reale.

- a) Si determini una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  formata da autovettori di  $A$ .  
 b) Si stabilisca se esistono valori di  $k$  per cui  $A$  e  $B$  sono simili.

SOLUZIONE:

- a) Il polinomio caratteristico di  $A$  è  $P_A(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$ , quindi gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda = 3$ , doppio, e  $\lambda = -1$ .  
 Calcoliamo gli autospazi:

$$E(3) = \ker(A - 3I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E(3) = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle = \left\langle \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0, 1, 0) \right\rangle$$

$$E(-1) = \ker(A + I) : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E(-1) = \langle (1, 0, -1) \rangle = \left\langle \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle$$

Infine una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  formata da autovettori di  $T$  è data da

$$B = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0, 1, 0), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

- b) Il polinomio caratteristico di  $B$  è  $P_B(\lambda) = (k - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$ , quindi gli autovalori di  $B$  sono  $\lambda = k, 3, -1$ . Condizione necessaria perché  $B$  sia simile ad  $A$  è che abbia gli stessi autovalori con la stessa molteplicità, quindi deve essere  $k = 3$ . Inoltre anche  $B$  deve essere diagonalizzabile: in questo modo  $A$  e  $B$  sono simili in quanto simili alla stessa matrice diagonale. Calcoliamo quindi l'autospazio  $E_B(3)$ , con  $k = 3$ :

$$E_B(3) = \ker(B - 3I) : \begin{bmatrix} -8 & 0 & -8 & | & 0 \\ -4 & 0 & -4 & | & 0 \\ 4 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_B(3) = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$$

Poiché  $E_B(3)$  ha dimensione due, anche  $B$  è diagonalizzabile, quindi  $A$  e  $B$  sono simili per  $k = 3$ . □

**Esercizio 0.4.** Sia  $r$  la retta dello spazio di equazioni cartesiane  $r : 2x - y + 1 = x - z = 0$ .

- (a) Si trovino equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta  $r'$  ottenuta proiettando  $r$  sul piano  $x + y + z = 0$  dal centro  $C = (2, 1, 1)$ .  
 (b) Trovare coordinate omogenee del punto all'infinito della retta  $r'$  e stabilire se  $r$  e  $r'$  sono parallele.

SOLUZIONE:

La retta  $r$  ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

- a) Il piano di vista ha coordinate omogenee  $N(1, 1, 1, 0)$  e  $C$  ha coordinate omogenee  $C(2, 1, 1, 1)$ , quindi la matrice della proiezione è

$$M = N^t C - (N \cdot C) I_4 = N^t C - 4I_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Consideriamo due qualsiasi punti di  $r$ , in coordinate omogenee, per esempio  $A = (0, 1, 0, 1)$  e  $P_\infty = (1, 2, 1, 0)$ , e calcoliamone la proiezione:

$$A' = A \cdot M = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = [2 \quad -3 \quad 1 \quad -3]$$

$$\Rightarrow A' = (2, -3, 1, -3) = \left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 1\right) \Rightarrow A' \left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right)$$

$$P'_\infty = P_\infty \cdot M = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = [4 \quad -4 \quad 0 \quad 4]$$

$$\Rightarrow P'_\infty = (4, -4, 0, 4) = (1, -1, 0, 1) \Rightarrow P'_\infty = (1, -1, 0)$$

Infine la retta  $r'$  è la retta passante per  $A'$  e  $P'_\infty$ :

$$r' : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -1 - 6t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad x - 5z - 1 = y + 6z + 1 = 0$$

- b) La retta  $r'$  ha direzione  $(5, -6, 1)$ , quindi punto all'infinito  $P'_\infty = (5, -6, 1, 0)$ .  $r$  e  $r'$  non sono parallele perchè le rispettive direzioni non sono proporzionali, ovvero non hanno lo stesso punto all'infinito. □

**Esercizio 0.5.** Sia  $\mathcal{C}$  la conica di equazione

$$\mathcal{C}_k : x^2 + 4xy + y^2 - 2kx + 4ky = 0.$$

- Stabilire il tipo di conica e la forma canonica di  $\mathcal{C}_k$ .
- In caso di conica a centro, trovare le coordinate del centro di simmetria al variare del parametro  $k$ .
- Trovare equazioni degli assi di simmetria di  $\mathcal{C}_1$  (porre  $k = 1$ ).

SOLUZIONE:

- a) Le matrici  $A'$  e  $A$  associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -k \\ 2 & 1 & 2k \\ -k & 2k & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A') = -13k^2$ , quindi se  $k = 0$  si tratta di una conica degenera. In particolare per  $k = 0$  si ottiene la conica  $\mathcal{C}_0 : x^2 + 4xy + y^2 = 0$ , ovvero la coppia di rette reali  $x = (-2 + \sqrt{3})y$  e  $x = (-2 - \sqrt{3})y$  che si intersecano nell'origine.

Nel caso non degenera,  $k \neq 0$ , per trovare la forma canonica determiniamo gli autovalori di  $A$ .  $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ , quindi  $A$  ha autovalori  $\lambda = 3$  e  $\lambda = -1$ . Poiché gli autovalori sono discordi si tratta di un'iperbole e quindi la forma canonica sarà del tipo  $ax^2 - by^2 - 1 = 0$ . Cerchiamo un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che  $I_3 = \det(A')$  è un invariante, quindi  $I_3 = \det(A') = \det(B)$ . Risolviamo quindi l'equazione:

$$-13k^2 = -3t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{13k^2}{3}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$3x^2 - y^2 + \frac{13k^2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{13k^2}x^2 - \frac{3}{13k^2}y^2 + 1 = 0$$

Per ottenere esattamente la forma canonica dobbiamo ancora effettuare la rotazione che scambia  $x$  e  $y$ :

$$\frac{3}{13k^2}x^2 - \frac{9}{13k^2}y^2 - 1 = 0$$

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema  $Ax = -h$ :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & k \\ 2 & 1 & -2k \end{array} \right] \Rightarrow C = \left( -\frac{5}{3}k, \frac{4}{3}k \right)$$

c) Gli asintoti sono rette passanti per il centro  $C = \left( -\frac{5}{3}k, \frac{4}{3}k \right)$  nel caso  $k = 1$ , di direzione parallela agli autovettori di  $A$ . Calcoliamo quindi gli autospazi di  $A$ :

$$E(-1) = N(A + I) : \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow E(-1) = \langle (1, -1) \rangle$$

$$E(3) = N(A - 3I) : \left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow E(3) = \langle (1, 1) \rangle$$

Infine gli assi sono le rette

$$a_1 : x + y + \frac{1}{3} = 0 \quad a_2 : x - y + 3 = 0$$

□