CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

II PROVA DI ACCERTAMENTO, FILA A – GEOMETRIA – 16/06/2008

Esercizio 0.1. *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^4$

$$T(x,y,z,w) = (-x+z,\ 2y,\ x-2z,\ w)$$

a) *Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.*
b) *Si determini l'inversa T^{-1}.*

Soluzione:
Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla matrice identica:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} -I \\ \\ III+I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} I-III \\ 1/2II \\ -III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

a) La matrice $M(T)$ ha rango 4, quindi $\text{Im}(T)$ ha dimensione 4 e T è suriettiva. Analogamente il nucleo di T ha dimensione $4-\text{rg}(A) = 0$, quindi T e iniettiva. Poiché T è sia iniettiva che suriettiva, T è biiettiva e quindi invertibile.
b) La matrice $M\left(T^{-1}\right)$ associata all'endomorfismo T^{-1} è l'inversa della matrice $M(T)$. Dai calcoli precedenti

$$M\left(T^{-1}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T^{-1}(x,y,z,w) = \left(-2x-z,\ \frac{1}{2}y,\ -x-z,\ w\right)$$

□

Esercizio 0.2. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (0,2,2), \quad v_3 = (1,1,0),$$

si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$T(v_1) = (2,0,0), \quad T(v_2) = (4,4,4), \quad T(v_3) = (0,6,6)$$

a) *Si determini la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini una base del nucleo e dell'immagine di T.*

Soluzione:

a) Per determinare la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica. A tale scopo dobbiamo prima esprimere i vettori della base canonica come combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$. Risolviamo le tre equazioni $xv_1+yv_2+zv_3 = e_i$, $i = 1,2,3$, riducendo a gradini contemporaneamente le matrici associate ai tre sistemi:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Di conseguenza

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ 2y + z = 0 \\ -2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + z = 1 \\ -2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - \frac{1}{2}v_3$$

Sfruttando la linearità di T possiamo ora ricavare le immagini degli elementi della base canonica:

$$T(e_1) = \frac{1}{2}T(v_1) - \frac{1}{4}T(v_2) + \frac{1}{2}T(v_3) = (0, 2, 2)$$
$$T(e_2) = -\frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{4}T(v_2) + \frac{1}{2}T(v_3) = (0, 4, 4)$$
$$T(e_3) = \frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{4}T(v_2) - \frac{1}{2}T(v_3) = (2, -2, -2)$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

In alternativa si poteva untilizzare la matrice di cambiamento di base:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Infine

$$M(T) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo $M(T)$ a gradini:

$$\begin{array}{c} 1/2II \\ 1/2I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $M(T)$ ha rango 2 e una base dell'immagine di T è

$$\mathcal{B}\left(\text{Im}(T)\right) = \{(0, 2, 2),\ (2, -2, -2)\}$$

Risolvendo il sistema omogeneo associato a T otteniamo

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi una base del nucleo di T è

$$\mathcal{B}\left(\text{N}(T)\right) = \{(-2, 1, 0)\}$$

□

Esercizio 0.3. *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$

$$T(x, y, z) = (ax,\ bx + y + z,\ y + z)$$

con a e b parametri reali.

a) *Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in $\mathbf{R}$.*
b) *Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice $A = M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = (a-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda = a, 0, 2$.

a) Se $a \neq 0, 2$, T ha tre autovalori singoli, quindi è sicuramente diagonalizzabile.

Se $a = 0$, l'autovalore $\lambda = 0$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(0)$:

$$E(0) = \mathrm{N}(A) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - III \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere due casi

– Se $a = 0$ e $b = 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
– Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Analogamente se $a = 2$, l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo quindi distinguere due casi

– Se $a = 2$ e $b = 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
– Se $a = 2$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Infine T è daigonalizzabile se $a \neq 0, 2$ per ogni valore di b, oppure se $a = 0$ o $a = 2$ e $b = 0$.

b) Per $a = b = 0$ abbiamo già in sostanza calcolato l'autospazio

$$E(0) = \langle (0, 1, -1),\ (1, 0, 0) \rangle$$

Notiamo che i due generatori trovati sono già tra loro ortogonali, quindi si tratterà solamente di renderli di norma 1.

Analogamente per $a = b = 0$ otteniamo:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Infine la base ortonormale cercata è

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (1, 0, 0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 0.4. *Siano* $M = (1, 1, 1)$, $N = (3, 2, 1)$, $L = (1, 2, 2)$ *punti dello spazio* $\mathbf{R}^3$. *Sia* $C = (-1, 0, 1)$.

a) *Si calcoli l'area del triangolo* MNL.
b) *Si determini l'insieme* $M'N'L'$ *che si ottiene proiettando il triangolo* MNL *dal centro* C *sul piano* $x + y = 0$.
c) *Si calcoli l'area del triangolo* $M'N'L'$.

Soluzione:

a) L'area del triangolo di vertici MNL è la metà dell'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{LN}$, dove

$$u = \overrightarrow{MN} = (2, 1, 0), \qquad v = \overrightarrow{LN} = (2, 0, -1)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogrammo cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -i + 2j - 2k = (-1, 2, -2)$$

Infine
$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2}|u \times v| = \frac{1}{2}|(-1,2,-2)| = \frac{3}{2}$$

In alternativa si poteva calcolare l'altezza del triangolo di base LN sfruttando la proiezione del vettore $u = \overrightarrow{MN}$ su $v = \overrightarrow{LN}$:
$$pr_v(u) = \frac{(u,v)}{(v,v)}v = \frac{4}{5}(2,0,-1)$$
Il vettore $u - pr_v(u) = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)$ è ortogonale a v e corrisponde all'altezza del triangolo di base v. Quindi
$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2} \cdot |(2,0,-1)| \cdot |\left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

b) Il vettore delle coordinate omogenee del piano è $P = (1,1,0,0)$ e il punto C ha coordinate omogenee $C = (-1,0,1,1)$. La matrice di proiezione è quindi
$$A = P^T C - (P \cdot C)I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Quindi
$$M \cdot A = (-1,1,3,3) \quad \Rightarrow \quad M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$
$$N \cdot A = (-2,2,6,6) \quad \Rightarrow \quad N' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$
$$L \cdot A = (-2,2,5,4) \quad \Rightarrow \quad L' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4},\right)$$
Quindi il triangolo viene proiettato nel segmento $M'L'$.

In alternativa si potevano calcolare le proiezioni senza utilizzare la matrice A. Per esempio per calcolare M' si poteva calcolare la retta
$$CM : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$
Il punto M' è dato dall'intersezione tra la retta CM e il piano $x + y = 0$:
$$M' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ 1 + 2t + 1 + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$
Analogamente si potevano ottenere gli altri punti.

c) Il triangolo $M'N'L'$ è degenere, quindi ha area nulla.

□

Esercizio 0.5. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*
$$\mathcal{C} : \ 3x^2 + 14xy - 5y^2 - 10x + 14y = 0$$

a) *Stabilire il tipo di conica.*
b) *Nel caso sia una conica a centro, trovare le coordinate del centro.*
c) *(Facoltativo) Trovare equazioni degli eventuali asintoti della conica.*

Soluzione:

a) Le matrici A' e A associate alla conica sono:
$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 7 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

La matrice A' ha determinante non nullo, quindi si tratta di una conica non degenere; inoltre $\det(A) = -64 < 0$, quindi si tratta di un'iperbole.

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema $Ax = -h$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & | & 5 \\ 7 & -5 & | & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow_{3II-7I} \begin{bmatrix} 5 & 7 & | & 5 \\ 0 & -64 & | & -56 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{8} \\ y = \frac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

c) Gli asintoti sono rette passanti per il centro, di direzione parallela ai punti all'infinito della conica. L'equazione della conica in coordinate omogenee è $3X^2 + 14XY - 5Y^2 - 10XZ + 14YZ = 0$. Ponendo $Z = 0$ otteniamo l'equazione $3X^2 + 14XY - 5Y^2 = 0$ le cui soluzioni sono

$$\frac{X}{Y} = \frac{-7 \pm 8}{3}$$

cioè le due rette $x + 5y = 0$ e $3x - y = 0$. Infine gli asintoti (passanti per il centro) sono le rette

$$a_1 : \ x + 5y - 4 = 0 \qquad a_2 : \ 3x - y + 2 = 0$$

$\square$