CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

II PROVA INTERMEDIA - 20/06/06 - FILA A

A.A. 2006/07

Esercizio 1.1. *Si consideri la funzione lineare* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ *definita da*

$$T(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ kx_1 + 3x_2 - 3x_3)$$

a) *Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di* T *al variare di* k.
b) *Si dica se esistono valori del parametro reale* k *per i quali* T *è iniettivae/o suriettiva.*
c) *Esistono valori di* k *per i quali il vettore* $v(1,1,0,0)$ *appartiene all'immagine di* T*?*

SOLUZIONE:
La matrice associata a T è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ k & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Per rispondere alle domande a) e b) dobbiamo calcolare il rango di A. Per rispondere alla domanda c) dobbiamo stabilire se il sistema $A|v$ ha soluzione. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|v$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ k & 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \\ IV - kIII \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 3+k & -3-k & | & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto della riduzione siamo già in grado di risponedere alle prime due domande.

a,b) A contiene la sottomatrice formata dalle sue prime tra righe di rango 3, quindi per ogni k

$$\dim(\mathrm{Im(T)}) = \mathrm{rg(A)} = 3 < 4 \text{ e } T \text{ non è suriettiva.}$$
$$\dim(N(T)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 0 \text{ e } T \text{ è iniettiva.}$$

c) Completiamo la riduzione:

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ IV - (k+3)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -6-2k & | & -k-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - (6+2k)III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & k+3 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha soluzione se $\mathrm{rg}(A|v) = 3$, quindi $v \in \mathrm{Im(T)}$ se $k = -3$.

In alternativa, anzicchè completare la riduzione, si poteva calcolare $\det(A|v)$ (parzialmente ridotta) e imporre che questo si annullasse.

□

Esercizio 1.2. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *associato alla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se* 4 *è autovalore di* A. *Calcolare gli autovalori e autovettori di* A.
b) *La matrice* A *è diagonalizzabile per similitudine? In caso affermativo, indicare una matrice diagonalizzante.*
c) *Sia* C *la matrice dipendente da* $t \in \mathbf{R}$*:*

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Esistono valori di $t \in \mathbf{R}$ *per cui* A *e* C *siano simili?*

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 & -1 \\ 2 & 7-\lambda & -1 \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (6-\lambda)\,[(7-\lambda)(3-\lambda)+3] - 3\,[6-2\lambda+2] + [6-14+2\lambda] =$$

$$= (6-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+24) - 3(8-2\lambda) - (2\lambda-8) =$$

$$= (6-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-4) + 6(\lambda-4) - 2(\lambda-4) =$$

$$= (\lambda-4)\,[(6-\lambda)(\lambda-6)+6-2] = -(\lambda-4)(\lambda^2-12\lambda+32)$$

a) Gli autovalori di A sono $\lambda = 4$ (doppio) e $\lambda = 8$. Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(4) = N(A-4I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2x+3y-z=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(4) = \langle\ (-3,2,0),\ (1,0,2)\ \rangle$$

$$E(8) = N(A-8I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(8) = \langle\ (1,1,1)\ \rangle$$

b) A è diagonalizzabile perché la molteplicitá algebrica e geometrica dei sui autovalori coincidono. La matrice diagonalizzante è:

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Poichè A è diagonalizzabile, A e C sono simili se anche C ha gli stessi autovalori di A ed è anch'essa diagonalizzabile (cioè sono simili alla stessa matrice diagonale). Perchè A e C abbiano gli stessi autovalori ($\lambda = 4$ doppio, e $\lambda = 8$) deve essere $t = 8$. Inoltre per tale valore l'autospazio $E(4)$ di C è

$$E_C(4) = N(C-4I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_C(4) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle \Rightarrow \dim(E_C(4)) = 1$$

Di conseguenza C non è diagonalizzabile e A e C non sono mai simili.

□

Esercizio 1.3. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo avente come autovettori i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$, rispetto agli autovalori $1,1,2$.*

a) *Calcolare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica.*
b) *T è invertibile?*
c) *T è un endomorfismo simmetrico?*

Soluzione:

Poiché v_1 è autovettore rispetto a $\lambda = 1$, otteniamo che $T(v_1) = v_1$. Analogamente $T(v_2) = v_2$ e $T(v_3) = 2v_3$. Di conseguenza

$$T(v_1) = (1,1,0), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (0,0,2)$$

a) Dobbiamo trovare le immagini della base canonica. Notiamo che

$$e_3 = v_3$$
$$e_2 = v_2 - v_3$$
$$e_1 = v_1 - e_2 = v_1 - v_2 + v_3$$

Per la linearità di T otteniamo che

$$T(e_3) = T(v_3) = (0,0,2)$$
$$T(e_2) = T(v_2) - T(v_3) = (0,1,1) - (0,0,2) = (0,1,-1)$$
$$T(e_1) = T(v_1) - T(v_2) + T(v_3) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,2) = (1,0,1)$$

Quindi la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

In alternativa per calcolare A si poteva utilizzare la matrice diagonalizzante P che ha per colonne gli autovettori, e la matrice diagonale D che ha gli autovalori sulla diagonale. Dalla relazione $P^{-1}AP = D$ si ricava $A = PDP^{-1}$.

b) T è invertibile se lo è A. Poiché $\det(A) = -2 \neq 0$, A e T sono invertibili.

c) T non è simmetrico perché A, che è associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica, non lo è.

□

Esercizio 1.4. *Siano $v_1 = (2,1,1,0)$ e $v_2 = (-1,1,2,0)$ e sia $V = \langle v_1,\ v_2\rangle \subset \mathbf{R}^4$.*

a) *Calcolare l'angolo tra v_1 e v_2.*

b) *Trovare una base del complemento ortogonale di V.*

Soluzione:

a) Indichiamo con ϑ l'angolo tra v_1 e v_2. Sappiamo che

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v_1, v_2)}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta = \arccos\left(\frac{1}{6}\right)$$

b) Il complemento ortogonale di V è lo spazio

$$\begin{aligned} V^\perp &= \left\{v = (x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid (v, v_1) = (v, v_2) = 0\right\} \\ &= \left\{v = (x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, \quad -x + y + 2z = 0 \ \right\} \end{aligned}$$

Risolviamo il sistema di due equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad {}_{2II+I}\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{5}{3}t \\ z = t \\ w = s \end{cases}$$

Infine una base di $V^\perp$ è

$$\mathcal{B}\left(V^\perp\right) = = \{\ (1,-5,3,0),\ (0,0,0,1)\ \}$$

□

Esercizio 1.5. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q}\ :\ (1+2k)x^2 + y^2 + z^2 + 2kyz - kz = 1 + k$$

a) *Per quali valori del parametro reale k la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide?*

b) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di paraboloide (ellittico o iperbolico).*

c) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 1+2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & -\frac{k}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{2} & -1-k \end{bmatrix}$$

a,b) $\mathcal{Q}$ è un paraboliode se è non degenere e $\det(A) = 0$. Cominciamo a calcolare il determinante di A:

$$\det(A) = (1+2k)\cdot(1-k^2) = 0 \qquad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{2},\ 1,\ -1$$

Consideriamo i tre casi

– Se $k = -\dfrac{1}{2}$ una riga di A' si annulla, quindi $\det(A') = 0$ e si tratta di una conica degenere.

– Se $k = 1$, la matrice A' diventa

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A') = -\frac{1}{2}$$

In questo caso si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

quindi gli autovalori non nulli di A sono $\lambda = 3,\ 2$. Poiché sono concordi si tratta di un paraboloide ellittico.

– Se $k = -1$, la matrice A' diventa

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A') = \frac{1}{4}$$

In questo caso si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

quindi gli autovalori non nulli di A sono $\lambda = -1,\ 2$. Poiché sono discordi si tratta di un paraboloide iperbolico.

c) Intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}:\ (1+2k)x^2 + y^2 = 1 + k$$

Consideriamo ora i due valori di k trovati ai punti precedenti.

– Se $k = 1$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}:\ 3x^2 + y^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 = 0$$

In questo caso otteniamo quindi un'ellisse.

– Se $k = -1$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}:\ -x^2 + y^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (-x+y)(x+y) = 0$$

Si tratta quindi di una conica degenere data dalle due rette

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

□