CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

II PROVA INTERMEDIA - 19/06/06 - FILA A

A.A. 2005/06

Esercizio 1.1. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice*

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.*
b) *Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im(T)}$ al variare di k.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice scambiando la prima e quarta colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 1 & 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-II \\ IV-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II \\ IV-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi per ogni k

$$\dim(\mathrm{Im(T)}) = \mathrm{rg(A)} = 3 < 4 \text{ e } T \text{ non è suriettiva.}$$
$$\dim(N(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 1 \text{ e } T \text{ non è iniettiva.}$$

□

Esercizio 1.2. *Sia $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ la funzione lineare così definita:*

$$S(A) = A - A^T$$

a) *Si determini il nucleo e l'immagine di S.*
b) *Posto $n = 2$, si determini la matrice associata a S rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) *Per $n = 2$, la funzione lineare S è diagonalizzabile?*

Soluzione:

a) Per definizione

$$N(S) = \left\{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = A^T \right\} = \{ \text{ matrici simmetriche di } M_n(\mathbf{R}) \}$$

Provando a calcolare $S(A)$ per qualche A si vede che le matrici $S(A) = B = [b_{i,j}]$ ottenute hanno necessariamente tutti zero sulla diagonale e hanno $b_{i,j} = -b_{j,i}$ per ogni $i \neq j$. Quindi:

$$\mathrm{Im(S)} = \left\{ \mathrm{A} \in \mathrm{M_n}(\mathbf{R}) \mid \mathrm{A} = -\mathrm{A^T} \right\} = \{ \text{ matrici antisimmetriche di } \mathrm{M_n}(\mathbf{R}) \}$$

b) Sia

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice associata a S rispetto a $\mathcal{B}$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$, espresse rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
S(A_1) &= A_1 - A_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_2) &= A_2 - A_2^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A_2 - A_3 = (0,1,-1,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_3) &= A_3 - A_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A_2 + A_3 = (0,-1,1,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_4) &= A_4 - A_4^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M:

$$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^3(\lambda - 2)$$

M ha due autovalori $\lambda = -2$, singolo, e $\lambda = 0$ di molteplicità algebrica 3, quindi è diagonalizzabile se l'autospazio $E(0)$ è di dimensione 3.

$$E(0) = N(M) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \\ w = r \end{cases} \Rightarrow \dim(E(0)) = 3$$

quindi S è diagonalizzabile.

$\square$

Esercizio 1.3. *Data la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Fissato a piacere un valore di k per cui M è diagonalizzabile, determinare per tale k la matrice P diagonalizzante.*

Soluzione:

Sviluppando rispetto alla seconda colonna, il polinomio caratteristico di M è

$$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)(k-\lambda)$$

quindi gli autovalori di M sono $\lambda = 1,\ 2,\ k$.

Calcoliamo ora gli autospazi $E(1)$ e $E(2)$:

$$E(1) = N(M-I): \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k-1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{k-1}{3}t \\ y = s \\ z = t \\ w = -\frac{k-1}{3}t \end{cases} \Rightarrow \dim(E(1)) = 2$$

$$E(2) = N(M-2I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k-2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ III-II \\ I \\ IV+I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & k-1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = (2-k)t \\ y = t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim(E(2)) = 1$$

a) Dobbiamo distinguere tre casi
 – Se $k \neq 1,\ 2$, allora gli autovalori e le dimensioni degli autospazi sono

$$\begin{aligned} &\lambda = 1 \text{ doppio}, && \dim(E(1)) = 2 \\ &\lambda = 2 \text{ singolo}, && \dim(E(2)) = 1 \\ &\lambda = k \text{ singolo}, && \Rightarrow \dim(E(k)) = 1 \end{aligned}$$

 quindi M è diagonalizzabile.
 – Se $k = 1$, allora gli autovalori e le dimensioni degli autospazi sono

$$\begin{aligned} &\lambda = 1 \text{ triplo}, && \dim(E(1)) = 2 \\ &\lambda = 2 \text{ singolo}, && \dim(E(2)) = 1 \end{aligned}$$

 quindi M non è diagonalizzabile.
 – Se $k = 2$, allora gli autovalori e le dimensioni degli autospazi sono

$$\begin{aligned} &\lambda = 1 \text{ doppio}, && \dim(E(1)) = 2 \\ &\lambda = 2 \text{ doppio}, && \dim(E(2)) = 1 \end{aligned}$$

 quindi M non è diagonalizzabile.

b) Fissiamo $k = 0$ e determiniamo $E(0)$:

$$E(0) = N(M): \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle\ (0,1,1,0)\ \rangle$$

Inoltre dai conti svolti precedentemente abbiamo che per $k = 0$:

$$\begin{aligned} E(1) &= \langle\ \left(-\frac{1}{3}, 0, 1, \frac{1}{3}\right),\ (0,1,0,0)\ \rangle = \langle\ (-1,0,3,1),\ (0,1,0,0)\ \rangle \\ E(2) &= \langle\ (2,1,1,0)\ \rangle \end{aligned}$$

Quindi la matrice diagonalizzante è
$$P=\begin{bmatrix}-1&0&2&0\\0&1&1&1\\3&0&1&1\\1&0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{con } P^{-1}MP=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

□

Esercizio 1.4. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito dalla matrice*
$$A=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&5&0&-1\\0&0&6&0\\0&-1&0&5\end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori di T.*
b) *Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T.*

Soluzione:
Notiamo che la matrice A è simmetrica, quindi è sicuramente diagonalizzabile.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico sviluppando rispetto alla prima riga:
$$p_M(\lambda)=\det\begin{bmatrix}4-\lambda&0&0&0\\0&5-\lambda&0&-1\\0&0&6-\lambda&0\\0&-1&0&5-\lambda\end{bmatrix}=(4-\lambda)(6-\lambda)[(5-\lambda)^2-1]$$
$$=(4-\lambda)^2(6-\lambda)^2$$
quindi gli autovalori di M sono $\lambda=4,\ 6$, entrambi di molteplicità algebrica 2..
Calcoliamo ora gli autospazi:
$$E(4)=N(M-4I):\quad \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&2&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\y=s\\z=0\\w=s\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ E(4)=\langle\ (1,0,0,0),\ (0,1,0,1)\ \rangle$$
$$E(6)=N(M-6I):\quad \begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&-1&0&-1\\0&0&0&0\\0&-1&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=t\\z=s\\w=-t\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ E(6)=\langle\ (0,0,1,0),\ (0,1,0,-1)\ \rangle$$

b) Notiamo che i due generatori di $E(4)$ e i due generatori di $E(6)$ determinati sono ortogonali tra loro, quindi per trovare un base ortonormale di R^4 basta renderli di norma 1:
$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4)=\left\{(1,0,0,0),\ \left(0,\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right),\ (0,0,1,0),\ \left(0,\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)\right\}$$

□

Esercizio 1.5. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*
$$\mathcal{Q}\ :\ xz-y^2-4z^2=0$$

a) *Riconoscere la quadrica*
b) *Se la quadrica è a centro, determinare coordinate del centro di simmetria ed equazioni degli assi di simmetria.*

c) *L'intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $y=1$ è una conica del piano π. Stabilire il tipo di conica.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Poiché $\det(A')=0$ la quadrica è degenere. Inoltre $\det(A)=\frac{1}{4}\neq 0$, quindi $\mathrm{rg}(A)=3$ e si tratta di un cono.

b) Risolviamo il sistema $A|-h$ per determinare il centro della quadrica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}z = 0 \\ -y = 0 \\ \frac{1}{2}x - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0,0,0)$$

Per determinare gli assi dobbiamo prima trovare gli autospazi di A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(-1-\lambda)(-4-\lambda) - \frac{1}{4}(-1-\lambda) \\ &= (-1-\lambda)\left(4\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda = -1, \qquad \lambda = \frac{-4+\sqrt{17}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-4-\sqrt{17}}{2}$$

Inoltre

$$E(-1) = N(A+I): \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 2I \\ \\ 2II-I \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$E(-1) = \langle\ (0,1,0)\ \rangle$

$$E\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right) = N\left(A - \frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right): \begin{bmatrix} \frac{4-\sqrt{17}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2-\sqrt{17}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-4-\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} 2I \\ 2II \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 4-\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2-\sqrt{17} & 0 \\ 1 & 0 & -4-\sqrt{17} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (4-\sqrt{17})III-I \end{array} \begin{bmatrix} 4-\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2-\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=(\sqrt{17}-4)t \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right) = \langle\ (1,\ 0,\ \sqrt{17}-4)\ \rangle$$

$$E\left(\frac{-4-\sqrt{17}}{2}\right) = N\left(A - \frac{-4-\sqrt{17}}{2}\right) : \begin{bmatrix} \frac{4+\sqrt{17}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-4+\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} 2I \\ 2II \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2+\sqrt{17} & 0 \\ 1 & 0 & -4+\sqrt{17} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (4+\sqrt{17})III - I \end{array} \begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2+\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (-\sqrt{17}-4)t \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{-4-\sqrt{17}}{2}\right) = \langle\ (1,\ 0,\ -\sqrt{17}-4)\ \rangle$$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (\sqrt{17}-4)t \end{cases} \qquad a_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (-\sqrt{17}-4)t \end{cases}$$

c) Intersechiamo $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $y = 1$, ottenendo la conica $-4z^2+xz-1 = 0$. La matrice B' associata a tale conica è:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det(B') \neq 0$ è una conica non degenere. Inoltre

$$p_B(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - \frac{1}{4}$$

Quindi B ha autovalori

$$\lambda = \frac{-4+\sqrt{17}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-4-\sqrt{17}}{2}$$

discordi e si tratta di un'iperbole.

$\square$