II PROVA DI ACCERTAMENTO - 20/06/2005 – A

A.A. 2004/05

Esercizio 1.1. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 - 2x_2 + (k-4)x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *un parametro reale.*

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di* T *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.
b) *Determinare una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T)$ *e* $\mathrm{N}(T)$ *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

SOLUZIONE:

Determiniamo la matrice associata a T rispetto alla base canonica calcolando:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (1, 1, 2, -1) \\ T(e_2) &= (1, 2, 2, -2) \\ T(e_3) &= (2, 4, 4, k-4) \\ T(e_4) &= (1, 1, 3, 2) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & k-4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ IV \\ III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Sappiamo che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A)$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T))$, quindi
   - Se $k \neq 0$, allora $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 4$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 4 = 0$, e T è sia suriettiva che iniettiva.
   - Se $k = 0$, allora $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 3 = 1$, e T non è né suriettiva né iniettiva.

b) Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi
   - Se $k \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3),\ T(e_4)\} \\ &\mathrm{N}(T) = \{(0, 0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

   - Se $k = 0$, allora

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_4)\}$$

Inoltre il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0, -2, 1, 0)\}$$

□

Esercizio 1.2. *Sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Determinare autovalori e autovettori di S.*
b) *Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso positivo individuare la matrice diagonalizzante.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2(-\lambda)(2 - \lambda)$$

Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \quad \text{doppio} \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 1$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ \\ III + 2I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y + z + 2w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -t \\ z = -t \\ w = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(1) = \langle \ (1, 0, 0, 0), \ (0, -1, -1, 1) \ \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che A è diagonalizzabile in quanto $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 e gli altri autovalori sono singoli.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 0$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z + 4w = 0 \\ y = 0 \\ y + 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(0) = \langle \ (-2, 0, 1, 0) \ \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z + 4w = 0 \\ y = 0 \\ y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -t \\ w = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(2) = \langle \ (2, 0, -1, 1) \ \rangle$$

b) Abbiamo già osservato che T è diagonalizzabile in quanto la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è $4 = \dim(\mathbf{R}^4)$, inoltre la matrice diagonalizzante P è:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 1.3. *Siano A e B le matrici reali*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare, se esistono, i valori del parametro reale k per cui A e B sono simili.*

SOLUZIONE:

Due matrici diagonalizzabili sono simili se sono simili alla stessa matrice diagonale, ovvero se hanno gli stessi autovalori. Inoltre se una delle due matrici è diagonalizzabile mentre l'altra non lo è, allora le due matrici non sono simili. Studiamo quindi la diagonalizzabilità di A e B.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$
$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

quindi A e B hanno gli stessi autovalori $\lambda_1 = 1$, doppio, e $\lambda_2 = 3$.

Per stabilire se A è diagonalizzabile calcoliamo la dimensione del suo autospazio $E_A(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \ E_A(1) = \langle (1,0,0), \ (0,1,0) \rangle$$

e la matrice A è diagonalizzabile.

A questo punto possiamo affermare che A e B sono simili se e solo se anche B è diagonalizzabile. Calcoliamo quindi la dimensione del suo autospazio $E_B(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $B - I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 5 & k-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ kx = 0 \\ 5x + (k-1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (k-1)y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Quindi l'autospazio $E_B(1)$ ha dimensione 2 se e solo se $k = 1$.

Infine A e B sono simili solamente se $k = 1$, quando sono entrambe simili alla matrice

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 1.4. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ (con il prodotto scalare canonico) generato dai vettori*

$$w_1 = (1,1,0,1), \ w_2 = (1,-2,0,0), \ w_3 = (1,0,-1,2).$$

a) *Trovare una base ortonormale di W.*
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di W.*

Soluzione:

a) Notiamo che l'insieme $\{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di W in quanto i vettori sono linearmente indipendenti (la matrice associata ha rango 3). Per determinare una base ortonormale $\{u_1, u_2, u_3\}$ dobbiamo utilizzare il metodo di Graham-Schmidt.

Il vettore u_1 lo otteniamo normalizzando w_1:

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1)$$

Per calcolare il vettore u_2 cominciamo con il calcolare il vettore v_2 ortogonale a u_1:

$$\begin{aligned} v_2 = w_2 - (w_2, u_1)\, u_1 &= (1,-2,0,0) - \frac{-1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1) \\ &= \frac{1}{3}\left[(3,-6,0,0) + (1,1,0,1)\right] = \frac{1}{3}(4,-5,0,1) \end{aligned}$$

Determiniamo ora il vettore di direzione parallela a $(4,-5,0,1)$ di norma 1:

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{42}}(4,-5,0,1)$$

Anche per calcolare il vettore u_3 calcoliamo prima il vettore v_3 ortogonale a u_1 e u_2.

$$\begin{aligned}
v_3 &= w_3 - (w_3, u_1)\, u_1 - (w_3, u_2)\, u_2 \\
&= (1,0,-1,2) - \frac{3}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1) - \frac{6}{\sqrt{42}}\frac{1}{\sqrt{42}}(4,-5,0,1) \\
&= (1,0,-1,2) - \frac{3}{3}(1,1,0,1) + \frac{6}{42}(-4,5,0,-1) \\
&= (1,0,-1,2) - (1,1,0,1) + \frac{1}{7}(-4,5,0,-1) = \frac{1}{7}(-4,-2,-7,6)
\end{aligned}$$

Determiniamo quindi il vettore di direzione parallela a $(-4,-2,-7,6)$ di norma 1:

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{105}}(-4,-2,-7,6)$$

Infine una base ortonormale di W è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, 0, \frac{1}{\sqrt{42}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{105}}, -\frac{2}{\sqrt{105}}, -\frac{7}{\sqrt{105}}, \frac{6}{\sqrt{105}}\right) \right\}$$

b) Il complemento ortogonale $W^\perp$ è formato dai vettori di $\mathbf{R}^4$ ortogonali ai vettori di W, ovvero ortogonali agli elementi di una sua base, quindi

$$W^\perp = \{(x,y,z,w) \mid x+y+w=0,\ x-2y=0,\ x-z+2w=0\}$$

Risolviamo quindi il sistema omogeneo ottenuto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}t \\ y = -\frac{1}{3}t \\ z = \frac{4}{3}t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Infine

$$\mathcal{B}(W^\perp) = \{\ (-2,-1,4,3)\ \}$$

$\square$

Esercizio 1.5. *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ :\quad x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che ci sono due rette che sono assi di simmetria di ogni conica della famiglia.*

Soluzione:

Consideriamo le matrici A' e A associate alla conica:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k-2}{2} & 0 \\ \frac{k-2}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Cominciamo a distinguere il caso degenere:

$$\det(A') = -4\left(1 - \left(\frac{k-2}{2}\right)^2\right)$$

quindi $\det(A') = 0$ se $\left(\dfrac{k-2}{2}\right)^2 = 1$, cioè

$$\frac{k-2}{2} = 1 \ \Rightarrow \ k-2 = 2 \ \Rightarrow \ k_1 = 4$$
$$\frac{k-2}{2} = -1 \ \Rightarrow \ k-2 = -2 \ \Rightarrow \ k_2 = 0$$

Infine la conica è non degenere se $k \neq 4$ e $k \neq 0$. Inoltre:

$$\det(A) = 1 - \left(\frac{k-2}{2}\right)^2 = \frac{-k^2+4k}{4}$$

Quindi
- Se $0 < k < 4$, si ha $\det(A) > 0$ e $\mathcal{C}$ è un'ellisse.
- Se $k < 0$ o $k > 4$, si ha $\det(A) < 0$ e $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
- Se $k = 0$ o $k = 4$ si tratta di una parabola degenere.

b) Abbiamo già visto che la conica è degenere se $k = 0$ o $k = 4$, inoltre:
- Se $k = 0$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$. Anche senza risolvere l'equazione con l'uso della formula otteniamo:

$$(x-y)^2 = 4 \ \Rightarrow \ x - y = \pm 2$$

Quindi in questo caso la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1 : \ x - y = 2, \qquad r_2 : \ x - y = -2$$

- Se $k = 4$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$ e in maniera del tutto analoga otteniamo:

$$(x+y)^2 = 4 \ \Rightarrow \ x + y = \pm 2$$

e la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1 : \ x + y = 2, \qquad r_2 : \ x + y = -2$$

c) Calcoliamo il centro delle coniche limitandoci a considerare $k \neq 0, 4$, in quanto in questi casi abbiamo già visto che si tratta di una coppia di rette parallele (e quindi prive di centro). Notiamo inoltre che nell'equazione non compaiono i termini lineari, quindi il centro si trova già nell'origine: $C = (0, 0)$.

Per trovare gli assi delle coniche calcoliamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$$

Quindi $p_A(\lambda) = 0$ se $1 - \lambda = \pm\dfrac{k-1}{2}$ e gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{k}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{-k+4}{2}$$

Calcoliamo l'autospazio $E\left(\frac{k}{2}\right)$

$$\begin{bmatrix} \frac{2-k}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ \frac{k-2}{2} & \frac{2-k}{2} & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{2-k}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $k \neq 2$ si ha $E\left(\frac{k}{2}\right) = \langle (1,1) \rangle$. Tratteremo il caso $k = 2$ successivamente separatamente.

Analogamente calcoliamo $E\left(\frac{-k+4}{2}\right)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{k-2}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ \frac{k-2}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{k-2}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, sempre supponendo $k \neq 2$, si ha $E\left(\frac{-k+4}{2}\right) = \langle (1,1) \rangle$.

Infine per $k \neq 0, 4, 2$ gli assi delle coniche sono le rette

$$a_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \quad \Rightarrow x + y = 0$$
$$a_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow x - y = 0$$

Notiamo che tali rette sono assi di simmetria anche per le coppie di rette che costituiscono la conica nei casi degeneri.

Infine se $k = 2$ la conica è la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ centrata nell'origine che ha come assi di simmetria qualsiasi retta per l'origine. In particolare quindi anche a_1 e a_2 sono suoi assi di simmetria.

$\square$