TRENTO, A.A. 2005/06
TEORIA DI GALOIS
FOGLIO DI ESERCIZI # 2

Attenzione! Alcuni esercizi, o alcune parti di essi, anticipano cose che vedremo prossimamente. Queste parti vanno fatte una volta che abbiamo visto i concetti relativi.

Esercizio 2.1. Sia E/F una estensione, e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ elementi algebrici su F. Diciamo che il grado di α_i su F (ovvero il grado del polinomio minimo di α_i su F) sia n_i.

Abbiamo definito

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = F(\alpha_1)(\alpha_2) \dots, (\alpha_n).$$

A voler essere più precisi, questa sarebbe una definizione ricorsiva ("per induzione"), data da

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \dots \alpha_{n-1})(\alpha_n).$$

Si mostri che gli elementi di $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ si scrivono come polinomi negli $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a coefficienti in F, e che il grado di α_i in queste espressioni si può prendere minore di n_i.

Esercizio 2.2. Si calcolino i gruppi di Galois delle seguenti estensioni:

- $\mathbf{Q}(\sqrt{2})/\mathbf{Q}$,
- $\mathbf{C}/\mathbf{R}$,
- $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbf{Q}$,
- $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbf{Q}$,
- $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2})/\mathbf{Q}$,

ove ω è una radice terza primitiva dell'unità.

Esercizio 2.3. Si calcolino i polinomi minimi su $\mathbf{Q}$ di $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e di $\sqrt[3]{2} + \omega$, ove ω è una radice terza primitiva dell'unità.

Esercizio 2.4. Sia $E = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ il campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$ del polinomio $f = (x^2 - 3)(x^2 - 5)$.

- Si mostri che $|E : \mathbf{Q}| = 4$.
- Si trovi $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbf{Q})$.
- Si trovi il polinomio minimo g di $\alpha = \sqrt{3} - 2\sqrt{5}$ su $\mathbf{Q}$.
- Si mostri che $E = \mathbf{Q}(\alpha)$.
- Si trovino tutti i sottogruppi di G, e tutti i campi intermedi fra $\mathbf{Q}$ e E.
- Si trovino i "primi" di tutti gli elementi appena trovati.