TRENTO, A.A. 2005/06
TEORIA DI GALOIS
FOGLIO DI ESERCIZI # 1

Esercizio 1.1. Sia E/F una estensione di campi, $\alpha \in E$ un elemento, e $0 \neq f \in F[x]$ un polinomio monico (dunque non nullo) tale che $f(\alpha) = 0$.

Si mostri che sono equivalenti le due affermazioni:

1. f è il polinomio minimo di α su F, e
2. f è irriducibile in $F[x]$.

Esercizio 1.2. Siano $K \subseteq F \subseteq E$ campi, e $\alpha \in E$. Si mostri che se α è algebrico su K, allora lo è anche su F, e il polinomio minimo di α su F è un divisore del polinomio minimo di α su K, e un multiplo di $x - \alpha$. Notate che $x - \alpha$ è il polinomio minimo di α su E.

Si mostri con un esempio che α può essere algebrico su F senza esserlo su K.

Esercizio 1.3. Se una estensione E/F ha grado finito, allora ogni elemento di E è algebrico su F, di grado un divisore di $|E : F|$.

(Suggerimento: Se $|E : F| = n$, e $\alpha \in E$,

$$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$$

sono $n + 1$ elementi di uno spazio vettoriale di dimensione n, dunque ... Per la seconda parte, usare la formula dei gradi qui sotto.)

Esercizio 1.4. Dimostrare la formula dei gradi, ovvero che se $K \subseteq F \subseteq E$ sono campi, e il grado $|E : K|$ è finito, allora

$$|E : K| = |E : F| \cdot |F : K|.$$

(Suggerimento: Si prendano una base $u_1, \dots u_n$ di E su F, e una base $v_1, \dots, v_m$ di F su K. Si mostri che gli nm elementi $u_i \cdot v_j$ sono una base di E su K.)

Esercizio 1.5. Si consideri l'insieme

$$A = \{ \alpha \in \mathbf{C} : \alpha \text{ è algebrico su } \mathbf{Q} \}.$$

Si mostri che A è un sottocampo di $\mathbf{C}$, e che il grado $|A : \mathbf{Q}|$ non è finito. (Suggerimento: Si considerino gli elementi $\alpha_n = \sqrt[n]{2}$. Qual è il grado di α_n su $\mathbf{Q}$?) (Suggerimento: Si può usare il fatto che la somma e il prodotto di due numeri algebrici sono algebrici, e lo stesso vale per l'inverso di un numero algebrico non nullo.)

Esercizio 1.6.

- Se $\varphi : A \to B$ è un isomorfismo di anelli, si mostri che la funzione inversa $\varphi^{-1} : B \to A$ è ancora un isomorfismo.
- Se C è un terzo anello, e $\psi : B \to C$ è un isomorfismo, si mostri che allora la composizione $\psi \circ \varphi$ è un isomorfismo.

Esercizio 1.7. Sia $f = a_n x_n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$, con $a_n, a_0 \neq 0$.

- Sia $\alpha \in \mathbf{Q}$ una radice di f, e si scriva $\alpha = \dfrac{u}{v}$, con u, v interi coprimi. Si mostri che u divide a_0, e v divide a_n.
- Si assuma ora f monico, cioè $a_n = 1$. Si mostri che se $\alpha \in \mathbf{Q}$ è una radice di f, allora $\alpha \in \mathbf{Z}$, e α divide a_0.