DIARIO DEL CORSO DI TEORIA DI GALOIS A.A. 2005/06

ANDREA CARANTI

La descrizione delle lezioni *non ancora svolte* si intende come previsione.

Lezione 1. martedí 13 settembre 2005 (2 ore)

Estensioni. Grado di una estensione. Estensioni semplici. La valutazione di un polinomio è un morfismo di anelli. Elementi trascendenti. Elementi algebrici: polinomio minimo. Il polinomio minimo di un elemento divide ogni polinomio che si annulli sull'elemento.

Lezione 2. mercoledí 14 settembre 2005 (2 ore)

Due polinomi hanno lo stesso valore su un elemento se e solo se sono congrui modulo il loro polinomio minimo. Grado di una estensione semplice. Il polinomio minimo è caratterizzato dal fatto di essere irriducibile. Isomorfismo fra una estensione semplice e l'anello delle classi di congruenza modulo il polinomio minimo. Il più piccolo sottoanello che contenga un elemento è già un campo. Isomorfismo fra le estensioni relative a due radici dello stesso polinomio minimo.

Lezione 3. venerdí 16 settembre 2005 (2 ore)

Isomorfismo fra le estensioni relative a due radici dello stesso polinomio irriducibile. Gruppo di Galois di una estensione. Il gruppo di Galois dei reali sui razionali. Un elemento del gruppo di Galois manda un elemento algebrico in un'altra radice del suo polinomio minimo. Esempi: il gruppo di Galois di $\mathbf{Q}(\sqrt{2}/\mathbf{Q})$ e di $\mathbf{C}/\mathbf{R}$. Il gruppo di Galois di $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}/\mathbf{Q})$. Campo di spezzamento di un polinomio.

Lezione 4. martedí 20 settembre 2005 (2 ore)

Esistenza del campo di spezzamento di un polinomio: aggiunzione di una radice. Il caso di $f = x^3 - 2$. Gli elementi di una estensione del tipo $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sono polinomi in $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a coefficienti in F.

Lezione 5. mercoledí 21 settembre 2005 (2 ore)

Unicità del campo di spezzamento. Dimostrazione per induzione, procedendo per estensioni di isomorfismi ad estensioni semplici. Lo stesso procedimento permette di calcolare i gruppi di Galois. Esempi: i campi di spezzamento su $\mathbf{Q}$ di $(x^2 - 2)(x^2 - 3)$ e di $x^3 - 2$.

Date: Trento, A. A. 2005/06.

Lezione 6. venerdí 23 settembre 2005 (2 ore)

Ricalcolo del gruppo di Galois del campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$ di $x^3 - 2$, vedendolo come $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbf{Q})$, ove ω è una radice terza primitiva dell'unità. Tale gruppo induce tutte le permutazioni sulle radici del polinomio. Corrispondenza di Galois: operazione "primo". La corrispondenza inverte le inclusioni. $L''' = L'$. Oggetti chiusi.

Lezione 7. martedí 27 settembre 2005 (2 ore)

Corrispondenza di Galois fra oggetti chiusi. Permutazioni. Azioni di gruppi su insiemi. Scrittura ciclica delle permutazioni. Classi laterali come orbite. Le orbite formano una partizione. Teorema di Lagrange.

Lezione 8. mercoledí 28 settembre 2005 (2 ore)

Forma generale del teorema di Lagrange. Dimostrazione della diseguaglianza $|M : L| \geq |L' : M'|$. Cenno al Teorema Orbita-Stabilizzatore. Applicazione: salendo di un grado (indice) finito da un oggetto chiuso, si ottiene un oggetto chiuso. Corrispondenza di Galois per una estensione di Galois di grado finito. Se $\mathrm{Gal}(E/F) = |E : F|$, allora E/F è di Galois. Estensioni di Galois e radici di polinomi irriducibili.

Lezione 9. venerdí 30 settembre 2005 (2 ore)

Se un polinomio irriducibile in $F[x]$ ha una radice in una estensione di Galois E di F, allora ce le ha tutte in E, ed esse sono distinte. Funzioni simmetriche elementari. Radici multiple: criterio della derivata. Un polinomio irriducibile con una sola radice multipla. Caratterizzazione delle estensioni di Galois come campi di spezzamento separabili (inizio).

Lezione 10. martedí 4 ottobre 2005 (2 ore)

Ancora sulla caratterizzazione delle estensioni di Galois come campi di spezzamento separabili. Il campo di spezzamento di un polinomio separabile è una estensione di Galois: estensione degli isomorfismi. Quando è disponibile a priori l'ordine del gruppo di Galois (per esempio perché l'estensione è un campo di spezzamento di un polinomio separabile) può essere facile calcolarlo con un *upper bound* sulle azioni degli elementi del gruppo.

Lezione 11. mercoledí 5 ottobre 2005 (2 ore)

Un polinomio a radici distinte è irriducibile se e solo se il gruppo di Galois agisce transitivamente sulle sue radici. Estensioni stabili e sottogruppio normali. Se E/F è di Galois, allora E/L è di Galois, per ogni campo intermedio L. Invece L/F è di Galois se e solo se L è stabile in E/F. Restrizione di isomorfismi a una estensione stabile.

Lezione 12. venerdí 7 ottobre 2005 (2 ore)

Restrizione di isomorfismi a una estensione stabile, e isomorfisimo (non ancora del tutto) con il gruppo quoziente.

Studio della corrispondenza di Galois per il campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$ di $x^4 - 2$.

Lezione 13. martedí 11 ottobre 2005 (2 ore)

Ancora sulla corrispondenza di Galois per il campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$ di $x^4 - 2$.

Equazioni di grado n. Eliminazione del coefficiente di grado $n-1$. L'equazione di secondo grado. L'equazione di terzo grado con il metodo euristico. Estensioni radicali.

Lezione 14. mercoledí 12 ottobre 2005 (2 ore)

Estensioni radicali. La chiusura normale di una estensione radicale è ancora radicale. Gruppo quoziente rispetto a un sottogruppo normale. Isomorfismo fra $\mathrm{Gal}(E/F)$ e $\mathrm{Gal}(R/F)/\mathrm{Gal}(R/E)$, se E/F e R/F sono estensioni di Galois, con $E \subseteq R$.

IL gruppo di Galois di una estensione radicale di grado primo è abeliano. Se un'equazione è risolubile per radicali, allora il suo gruppo di Galois è risolubile.

Equazione generale di n-simo grado.

Lezione 15. venerdí 14 ottobre 2005 (2 ore)

Se E è un campo, G un gruppo finito di automorfismi di E, e $F = G'$, allora E/F è di Galois, e $\mathrm{Gal}(E/F) = G$. L'equazione generale di n-simo grado ha per gruppo di Galois S_n. L'equazione $x^5 - 6x + 3 = 0$ ha gruppo di Galois S_5 su $\mathbf{Q}$: Lemma di Cauchy, sottogruppi di S_5 generati da un 5-ciclo e da un 2-ciclo (inizio).

Lezione 16. martedí 18 ottobre 2005 (2 ore)

Un 2-ciclo e un 5-ciclo generano S_5. Permutazioni pari e dispari: azione sul polinomio $\prod_{1 \le i < j \le n}(t_i - t_j)$. Gruppo alterno A_n. Relazione di coniugio: classi di coniugio. Coniugato di un ciclo.

Lezione 17. mercoledí 19 ottobre 2005 (2 ore)

Classi di coniugio in S_5 e A_5: partizioni di n e struttura ciclica di un elemento di S_n. Centralizzanti e cenno al teorema orbita/stabilizzatore. A_5 è un gruppo semplice non abeliano, dunque non è risolubile. Discriminante: equazioni con gruppo di Galois A_5. Risolventi di Lagrange (inizio).

Lezione 18. venerdí 21 ottobre 2005 (2 ore)

Risolventi di Lagrange. Determinante di Vandermonde. Discriminante di una equazione di terzo grado. Casus irreducibilis. Si può supporre che il discriminante sia nel campo base.

Lezione 19. martedí 25 ottobre 2005 (2 ore)

Conclusione del casus irreducibilis: riducibilità di polinomi della forma $x^p - b$, ove p è un primo.

Equazione di quarto grado: cubica risolvente.

Lezione 20. venerdí 28 ottobre 2005 (2 ore)

Equazione di quarto grado.

Riepilogo.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, via Sommarive 14, 38050 Povo (Trento)

E-mail address: caranti@science.unitn.it

URL: http://www-math.science.unitn.it/~caranti/