TRENTO, A.A. 2020/21
CORSO DI ALGEBRA B
FOGLIO DI ESERCIZI # 8

Esercizio 8.1 (Non ve lo chiedo, ma *per favore* fatelo lo stesso). Sia F un campo, e definiamo la derivata su $F[x]$ ponendo

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Mostrate che per $f, g \in F[x]$ e $a, b \in F$ valgono

(1) $(af + bg)' = af' + bg'$,
(2) $(fg)' = f'g + fg'$.

Esercizio 8.2. Sia F un campo, $f \in F[x]$ un polinomio monico, non costante.

(1) Si definisca il concetto di radice semplice e multipla.
(2) Si mostri che se E è una estensione di F, e α è una radice di f, allora $\alpha \in E$ è una radice multipla di f se e solo se α è radice di f'.
(3) Si mostri che la radici multiple di f in qualche estensione di F sono tutte e sole le radici di $\gcd(f, f')$.

Esercizio 8.3. Sia E un campo finito di ordine p^n, con p primo e n intero positivo.

(1) Si mostri che gli elementi di E sono le radici del polinomio
$$f = x^{p^n} - x \in \mathbf{F}_p[x].$$
(2) Sia L il campo di spezzamento di f su $\mathbf{F}_p$. Si mostri che l'insieme
$$R = \{\, \alpha \in L : f(\alpha) = 0 \,\}$$
delle radici di f in L ha p^n elementi, è un sottoanello di L, ed è un campo.

Esercizio 8.4. Si mostri che c'è un unico polinomio irriducibile f di grado 2 in $F[x]$, ove $F = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Si costruisca un campo $E = F[\alpha]$ con 4 elementi, ove α è radice di f.

Si trovino in E tutte le radici di f.

Esercizio 8.5 (Lo finisco in classe la prossima settimana).

Si trovino i due polinomi irriducibili f_1, f_2 di grado 3 in $F[x]$, ove $F = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Si costruisca un campo $E = F[\alpha]$ con 8 elementi, ove α è radice di f_1. Si calcolino le potenze di α, costruendo la tabella del logaritmo discreto. Si trovino in E tutte le radici di f_1 e f_2.

Si costruisca un campo $E = F[\beta]$ con 8 elementi, ove β è radice di f_2. Si calcolino le potenze di β, costruendo la tabella del logaritmo discreto. Si trovino in E tutte le radici di f_1 e f_2.