

Geometria B

Foglio di Esercizi n.6

17 Maggio 2017

Esercizio 1. Calcola lo sviluppo di Laurent delle seguenti funzioni in un intorno dell'origine e deduci il tipo di singolarità che le funzioni hanno in tale punto. Calcola infine il residuo all'infinito delle funzioni.

$$\frac{\sin(z^2)}{z}, \frac{1 - \exp(-z)}{z^2}, \frac{\exp(-1/z^2)}{z}, z^3 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

Esercizio 2. Determina e classifica le singolarità delle seguenti funzioni.

$$\frac{\exp(z) - 1}{z}, \frac{1}{z^4}, \exp\left(\frac{1}{z^2}\right), \cos\left(\frac{1}{z}\right), \frac{1 - \cos(z)}{\exp(2iz) - 1}$$

Esercizio 3. Sia f e g due funzioni tali che entrambe hanno in $z = z_0$ un polo. Cosa possiamo dire della funzione $f(z)g(z)$ in $z = z_0$? E della funzione $f(z)/g(z)$?

Se f e g hanno entrambe una singolarità essenziale in $z = z_0$, allora anche $f(z)g(z)$ ha una singolarità essenziale in $z = z_0$?

Esercizio 4. Individua le singolarità delle seguenti funzioni e calcolane i residui nelle singolarità isolate

i. $f(z) = \frac{1}{z^2};$

viii. $f(z) = \frac{(\text{Log}(z))^4}{1 + z^2};$

ii. $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1};$

ix. $f(z) = \frac{z}{\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)};$

iii. $f(z) = \frac{\exp(iz)}{(z^2 + 1)^2};$

x. $f(z) = \cotg(z) - \frac{1}{z};$

iv. $f(z) = \frac{\exp(z) - 1}{z^3};$

xi. $f(z) = \frac{1}{z(\exp(z) - 1)};$

v. $f(z) = \frac{1}{z \sin(z)};$

xii. $f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z+1}\right);$

vi. $f(z) = \frac{\exp(\alpha z)}{1 + \exp(z)}, \alpha \in \mathbb{R};$

xiii. $f(z) = \frac{z^2}{\sin^2\left(\frac{1}{z+1}\right)};$

vii. $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^4};$

xiv. $f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)}{z-2}.$

Esercizio 5. Sia

$$f(z) := \frac{z \exp(2\pi z^2)}{\exp(2\pi z^2) - 1};$$

descrivi le singolarità di f e determina i residui di f in tali punti.