Geometria B

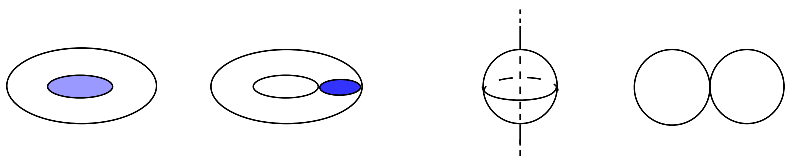
Foglio di Esercizi n.3

31 Marzo 2017

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi di $(\mathbb{R}^3, \varepsilon)$:

- il toro T ottenuto facendo ruotare la circonferenza di centro $(2, 0)$ e raggio unitario nel piano xz attorno all'asse z;
- la sfera S^2 centrata in $(0, 0, 0)$ e di raggio 1;
- il disco D_1 centrato nell'origine e di raggio unitario che sta nel piano xy;
- il disco D_2 è il disco centrato in $(0, 2, 0)$ e di raggio unitario che sta nel piano yz.

Suddividere i seguenti spazi topologici in classi d'omotopia e calcolare il loro gruppo fondamentale:



$X = T \cup D_1$ $\quad$ $Y = T \cup D_2$ $\quad$ $Z = S^2 \cup \mathbb{R}_z$ $\quad$ $W = S^1 \vee S^1$

Esercizio 2. Si considerino in $(\mathbb{R}^3, \varepsilon)$ i seguenti sottospazi:

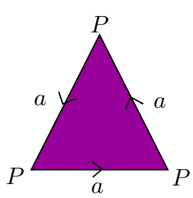
$$X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$$

$$X_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 1\}$$

Calcolare il gruppo fondamentale di $X = X_1 \cup X_2$ e $Y = X_2 \cup X_3$.

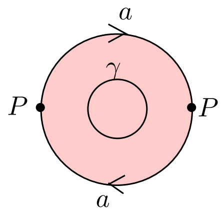
Esercizio 3. Sia X lo spazio topologico ottenuto dal poligono piano effettuando le identificazioni indicate in figura:



1. Si calcoli il gruppo fondamentale di X.
2. X è una superficie topologica?

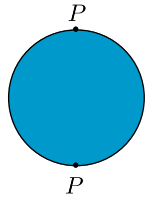
Esercizio 4. Sia X lo spazio topologico così definito: X è l'unione degli spigoli di un tetraedro. Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{RP}^2$ il piano proiettivo reale e sia $\gamma \simeq S^1 \subset \mathbb{RP}^2$ come in figura.

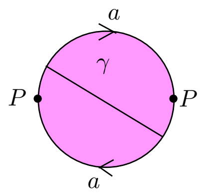


Si stabilisca se γ è un retratto e/o un retratto di deformazione di $\mathbb{RP}^2$.

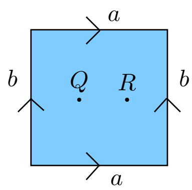
Esercizio 6. Sia X il disco con due punti identificati e sia $A \subset X$ il bordo del disco con due punti identificati. Si stabilisca se A è un retratto e/o un retratto di deformazione di X.



Esercizio 7. Sia $\mathbb{RP}^2$ il disco unitario con i punti antipodali del bordo identificati, e sia γ l'immagine in $\mathbb{RP}^2$ di un diametro del disco. Si stabilisca se γ è un retratto e/o un retratto di deformazione di $\mathbb{RP}^2$.

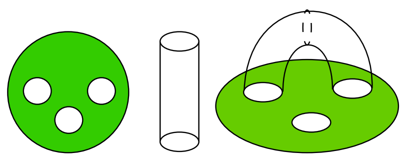


Esercizio 8. Sia X il quadrato in figura quozientato rispetto alle identificazioni mostrate, e siano Q e R i punti di X come in figura.



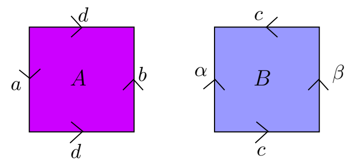
Si calcoli il gruppo fondamentale di $X \setminus \{Q, R\}$.

Esercizio 9. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco chiuso centrato nell'origine e di raggio 4 e siano D_1, D_2 e D_3 i dischi aperti di raggio unitario centrati ripettivamente in $(-2, 0), (0, -2), (2, 0)$.
Siano $Y = D \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$, Z il cilindro $S^1 \times [0, 4]$ e X lo spazio topologico ottenuto dall'unione di Y e Z identificando il bordo inferiore del cilindro con il bordo di D_1 e il bordo superiore con il bordo di D_3, come in figura:



Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 10. Siano A e B i poligono in figura:



Si calcolino i gruppi fondamentali dei seguenti spazi topologici:

- X_1 ottenuto contraendo a un punto il sottospazio $a \cup b \cup \alpha \cup \beta$;
- X_2 ottenuto contraendo a un punto c ed identificando punto a punto a con α e b con β;

X_1 e X_2 sono superfici topologiche?

Esercizio 11. Sia S la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 in $\mathbb{R}^3$, sia

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1/4, z = 0\},$$

sia $C = \Gamma \times [-1, 1]$ e sia $X = S \cup C$, con la topologia indotta da quella euclidea. Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 12. Risolvere le seguenti equazioni:

a) $i\bar{z}z^3 - 2\bar{z}\Im m(z) - i = 0$ **b)** $2\bar{z}z^3 + z\Re e(z) - 3 = 0$

c) $|z|\, z^3 + z^3 - 8i\,|z| - 8i = 0$ **d)** $z^2 - 2z + 2 = 0$

e) $5\left|z^3\right| + 2 + 3(\bar{z})^6 = 0$ **f)** $|z|^2 + z^2 - iz - 1 = 0$

g) $z\,|z| - 2z + i = 0$ **h)** $z^3 = |z|^4$

i) $\left|z^2\right| z^2 = i$ **l)** $z^2 + i\bar{z} = 1$

Esercizio 13. Determinare per quali costanti $a, b, c \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono olomorfe in tutto il piano complesso:

a) $f(x, y) = x + ay + i(bx + cy)$;

b) $g(x, y) = x^2 + ay^2 + i(bxy + c)$.

Esercizio 14. Dimostrare che se f è olomorfa su $\mathbb{C}$ allora $g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$g(z) := \overline{f(\overline{z})}$$

è olomorfa in $\mathbb{C}$.

Esercizio 15. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x, y) := \sin(x)(e^{-\alpha y} + e^y)$$

può essere considerata parte reale di una funzione olomorfa.

Esercizio 16. Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione olomorfa non costante in un aperto Ω. La funzione $u^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ può essere parte reale o parte immaginaria di una funzione olomorfa in Ω?