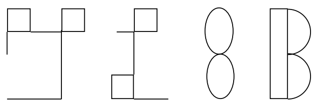
GEOMETRIA III

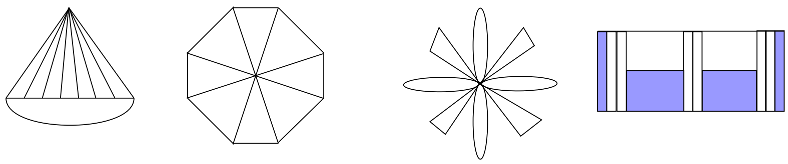
II Foglio di Esercizi - 17 Marzo 2014

Gruppo fondamentale

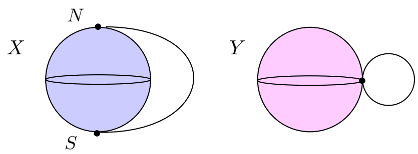
Esercizio 1. Dividere i seguenti sottospazi di $(\mathbb{R}^2, \varepsilon)$ in classi d'omotopia e calcolare il loro gruppo fondamentale.
A)



B)



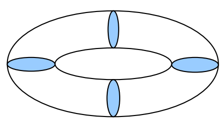
Esercizio 2. Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti sottospazi di $(\mathbb{R}^3, \varepsilon)$:



Esercizio 3. Sia $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2\}$. Si calcoli il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \backslash Z$.

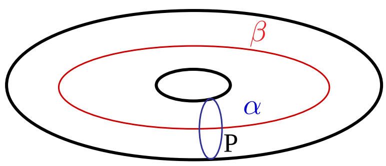
Esercizio 4. Il sottospazio $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geq x^2\right\}$ è semplicemente connesso, cioè è connesso per archi e ha gruppo fondamentale banale?

Esercizio 5. Si consideri il toro $T \subset (\mathbb{R}^3, \varepsilon)$ ottenuto facendo ruotare la circonferenza di centro $(2, 0)$ e raggio unitario nel piano $\mathbb{R}^2_{xz}$ attorno all'asse delle z. Sia X lo spazio ottenuto aggiungendo al toro n dischi come in figura:



Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 6. Sia $T = S^1 \times \mathbb{D}^2$ il toro pieno, α e β cammini come in figura.



- Stabilire se α è retratto e/o retratto di deformazione di T.
- Stabilire se β è retratto e/o retratto di deformazione di T.
- Calcolare il gruppo fondamentale di T.
- $A = S^1 \times S^1$ è un retratto di T?

Esercizio 7. Si considerino in $(\mathbb{R}^3, \varepsilon)$ i seguenti sottospazi:

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } \mid x \mid + \mid y \mid + \mid z \mid \geq 1\}$$

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } \mid x \mid + \mid y \mid + \mid z \mid > 1\}$$

Trovare un retratto di deformazione per X ed uno per Y, e calcolare il gruppo fondamentale di X e Y.

Esercizio 8. In $(\mathbb{R}^3, \varepsilon)$ si considerino la sfera unitaria S^2 centrata in $(0,0,0)$ ed il seguente sottospazio

$$\begin{aligned} Y \quad = \quad & \{(x,y,z) \in S^2 : z \leq 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x = y, y \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]\} \cup \\ & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0, y \in [-1,1]\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0, x \in [-1,1]\} \end{aligned}$$

Calcolare il gruppo fondamentale di Y.

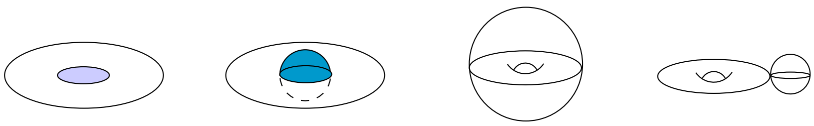
Esercizio 9. Sia $X = \mathbb{RP}^2 \setminus \{R, Q\}$ il piano proiettivo privato di due punti. Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 10. Calcolare il gruppo fondamentale dello spazio topologico ottenuto come somma connessa di due tori privata di un punto.

Esercizio 11. Si considerino i seguenti sottospazi di $(\mathbb{R}^3, \varepsilon)$:

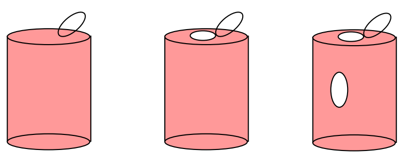
- il toro T ottenuto facendo ruotare la circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio unitario nel piano xz attorno all'asse z;
- la sfera $S^2((x,y,z),r)$ centrata in (x,y,z) e di raggio r;
- il disco D^2 centrato nell'origine e di raggio unitario che sta nel piano xy;

Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti spazi:



$X = T \cup D^2$ $\quad$ $Y = T \cup S^2((0,0,0),1)$ $\quad$ $Z = T \cup S^2((0,0,0),3)$ $\quad$ $W = T \cup S^2((0,4,0),1)$

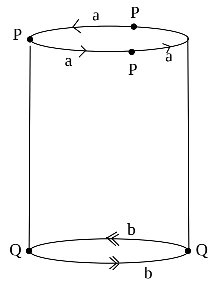
Esercizio 12. Si considerino i seguenti spazi topologici: X è la lattina chiusa (vuota), Y è la lattina aperta (vuota), Z è la lattina aperta e bucata (vuota)



X $\quad$ Y $\quad$ Z

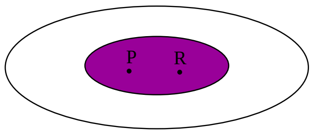
e se ne calcolino i gruppi fondamentali.

Esercizio 13. Sia X lo spazio topologico quoziente di un cilindro rispetto alle identificazioni in figura:



Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 14. Sia X lo spazio topolgico ottenuto dall'unione di un toro e di un disco privato di due punti come in figura:

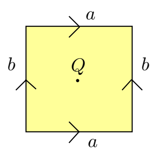


Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 15. In $(\mathbb{R}^3, \varepsilon)$ si considerino la sfera unitaria S^2 centrata in $(0,0,0)$ ed il seguente sottospazio

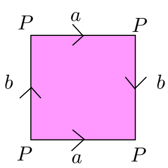
$$X = \{(x,y,z) \in S^2 : z \leq 0\} \cup \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 : y \in [-1,1]\} \cup \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in [-1,1]\}$$

Sia Y il toro meno il punto Q:



Si stabilisca se X e Y sono omeomorfi e/o se hanno lo stesso tipo di omotopia.

Esercizio 16. Sia K la bottiglia di Klein, e siano a e b i cammini su di essa come in figura.



Sia X lo spazio topologico ottenuto contraendo ad un punto a e sia Y lo spazio topologico ottenuto contraendo ad un punto b. Calcolare il gruppo fondamentale di X e Y e stabilire se sono omeomorfi e/o se hanno lo stesso tipo di omotopia.

Esercizio 17. Sia T il toro e siano a e b i cammini generatori del gruppo fondamentale del toro. Stabilire se $a \cup b$ è un retratto e/o retratto di deformazione di T.