GEOMETRIA III

I Foglio di Esercizi - 3 Marzo 2014

Omotopia e Retratti

Esercizio 1. Dimostrare che $[0,1]$ e $\mathbb{R}$ sono contraibili.

Esercizio 2. Dimostrare che se X e Y sono spazi topologici e Y è contraibile allora tutte le funzioni continue $f : X \to Y$ sono omotope.

Esercizio 3. Dimostrare che in uno spazio di Hausdorff ogni retratto è chiuso.

Esercizio 4. Sia $(\mathbb{R}^2, \varepsilon)$ il piano reale con la topologia euclidea. Consideriamo $P = (0,1)$ e i seguenti sottoinsiemi:

- $I_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, y = k\}$
- $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
- $X_k = S^1 \backslash \{P\} \cup I_k$

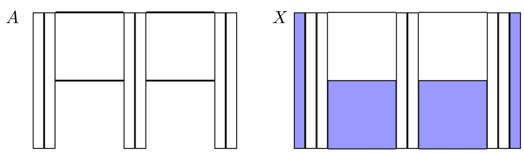
1. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ X_k è connesso e per quali è compatto.
2. Dividere la famiglia $\{X_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ in classi d'omotopia.

Esercizio 5. Dire se $A, B, C \subset (\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ sono omotopicamente equivalenti:

$$A = \{v \in \mathbb{R}^n : \| v \| \leq 5\},\ B = \{v \in \mathbb{R}^n : \| v \| < 2\},\ C = \{v \in \mathbb{R}^n : \| v \| \leq 1\}.$$

B è un retratto di A?

Esercizio 6. Si consideri $X \subset (\mathbb{R}^2, \varepsilon)$ e $A \subset X$:

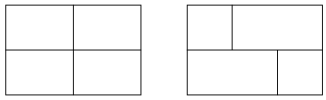


Mostrare che A è un retratto di deformazione di X.

Esercizio 7. Sia Y l'unione di due lati di un triangolo X nel piano reale con la topologia euclidea. Y è un retratto di deformazione di X?

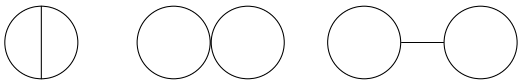
Esercizio 8. Dimostrare che il bicchiere vuoto Y è omotopicamente equivalente al bicchiere pieno X, cioè mostrare che in $(\mathbb{R}^3, \epsilon)$ $X = \mathbb{D}^2 \times [0,1]$ e $Y = \mathbb{D}^2 \times \{0\} \cup S^1 \times [0,1]$ hanno lo stesso tipo d'omotopia.

Esercizio 9. Dire se i seguenti sottospazi di $(\mathbb{R}^2, \varepsilon)$ sono omotopicamente equivalenti:



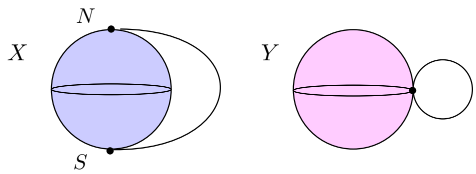
Esercizio 10. Sia X lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ privato degli assi coordinati.
Sia $C = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ e sia Y l'unione degli spigoli di C. Mostrare che X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 11. Provare che i seguenti sottospazi di $(\mathbb{R}^2, \varepsilon)$ sono omotopicamente equivalenti.



Esercizio 12. Si considerino i seguenti sottospazi di $(\mathbb{R}^3, \varepsilon)$:

- $X = S^2 \amalg I / \sim$ dove $\sim$ è così definita: $N \sim 0$, $S \sim 1$, con N, S rispettivamente polo nord e polo sud della sfera;
- $Y = S^2 \vee S^1$.



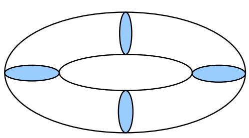
Provare che X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 13. In $(\mathbb{R}^3, \varepsilon)$ si consideri la sfera unitaria S^2 centrata nell'origine e sia X lo spazio topologico così definito:

$$X = \{(x,y,z) \in S^2 | z \leq 0\} \cup \{(x,y,z) \in S^2 | xy = 0\}.$$

Provare che X è omotopicamente equivalente a $S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

Esercizio 14. Si consideri il toro $T \subset (\mathbb{R}^3, \varepsilon)$ ottenuto facendo ruotare la circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio unitario nel piano $\mathbb{R}^2_{xz}$ attorno all'asse delle z. Sia X lo spazio ottenuto aggiungendo al toro n dischi come in figura:



Provare che $X \sim \vee_1^n S^2 \vee S^1$.