

The background is a light purple gradient with various mathematical symbols scattered throughout. Some symbols are large and have a 3D effect with a white highlight, while others are smaller and semi-transparent. The symbols include plus signs, minus signs, multiplication signs, division signs, and percent signs. The overall aesthetic is clean and modern.

*Racconti dal mondo
della matematica*

Progetto a cura di Marika Gugole e Michael Lonardi

Realizzato per il corso di "Comunicazione delle scienze"

Anno accademico 2015/2016

Università degli Studi di Trento



Sommario

Introduzione	6
Mantenere l'ordine.....	9
Cambiamenti	11
I numeri primi	13
La cena	15
La giusta enfasi	17
Strani individui.....	19
Il luna park	21
L'esame	23
Il posto giusto	25
Un ospite molto gradito	27

Introduzione

Con questi dieci racconti vogliamo farvi scoprire quanto possa essere facile e divertente ricordare la matematica.

Le storie sono ambientate nel mondo della matematica, i cui abitanti sono tutti gli “oggetti” che si incontrano durante lo studio di questa materia. Gli argomenti variano dai semplici numeri primi e frazioni, che si sono studiati alle scuole elementari, ad alcuni più complessi, come la funzione gaussiana, che richiedono un po' più d'esperienza.

Per cercare di rendere accessibile a tutti il nostro scritto abbiamo riportato una breve spiegazione matematica di ciò che viene citato nel racconto.

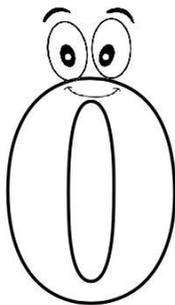
All'interno delle nostre storie citiamo dei *luoghi comuni* (assolutamente falsi) e dunque prima di passare alla lettura è bene ricordarvi che:

- Gli studenti di fisica non capiscono l'analisi: gli esami di analisi spesso risultano essere un grande ostacolo per gli studenti di fisica che la ritengono una materia troppo intricata e talvolta inutile.
- I fisici vengono criticati dai matematici perché troppo “approssimativi”: la matematica è una materia rigorosa, la fisica spesso dimentica questo rigore.

Detto ciò, la nostra speranza è quella di farvi divertire e vivere un'esperienza positiva (se per voi così non è stato) nell'ambito della matematica!

Alcune caratteristiche dello zero

- È l'unico numero a non essere né positivo né negativo.
- Zero non significa senza valore, è una "quantità" ben precisa. Ad esempio se si dice che la temperatura è 0°C allora si può concludere che in quell'ambiente l'acqua si troverà allo stato solido, al contrario se non è conosciuto il suo valore, ovvero la temperatura è senza valore, allora non si potrà concludere nulla sul comportamento dell'acqua.
- Qualsiasi numero moltiplicato per zero darà come risultato 0.
- La divisione di un qualsiasi numero (eccetto 0) per zero è impossibile: $\frac{x}{0}=?$ Non è possibile trovare un numero che moltiplicato per 0 dia un risultato diverso da 0, come detto sopra. Se invece consideriamo il caso in cui $x = 0$ allora otterremo infinite soluzioni, infatti qualsiasi numero moltiplicato per 0 restituisce 0.



Mantenere l'ordine

Nel mondo della matematica non tutti si comportavano al meglio e infatti capitava che qualcuno sentisse il bisogno di ribellarsi o di ottenere ciò che voleva con la forza.

In queste situazioni era necessario far intervenire chi era in grado di eliminare il colpevole: lo zero. Questo personaggio era molto temuto poiché gli bastava toccare qualcuno per annullarlo; nessuno avrebbe mai avuto il coraggio di contraddirlo.

Lo zero aveva però anche un'assistente: la derivata. Lei non era drastica come lui e, quando ne aveva la possibilità, cercava sempre di ridurre il problema senza distruggerlo completamente. A lei era affidato il compito di trattare con le bande di ribelli chiamate "potenze positive di x ". Era un compito facile, spesso le bastava agire una, due, tre volte e l'interessato veniva ridotto ad un'innocua costante.

Quando, però, il soggetto non era riducibile così facilmente ad una costante, derivata e zero dovevano agire insieme. Prima derivata provava a farlo ragionare, ad esempio, quando si trovò ad affrontare logaritmo, decise che prima sarebbe stato meglio trasformarlo in $\frac{1}{x}$ per vedere se si sarebbe calmato: di solito le potenze negative di x si sentivano poco sicure di loro e così fu, logaritmo fu messo al suo posto.

Diverso fu il caso dell'esponenziale di x : lui non cedette alla derivata e quando intervenne lo zero perse tutte le sue proprietà.

Le frazioni

Una frazione è un rapporto fra due numeri interi x e y e si indica in matematica con il simbolo $\frac{x}{y}$. x è detto numeratore e y denominatore.

Se x e y hanno un divisore comune (che indichiamo con c) allora la

frazione $\frac{\frac{x}{c}}{\frac{y}{c}}$ ha lo stesso valore della funzione di partenza e lo stesso vale se si moltiplicano entrambi per una stessa costante.

Ridurre ai minimi termini una frazione significa dividere numeratore e denominatore per i loro divisori comuni finché non si ottengono due numeri primi fra loro.

Esempio:

$$\frac{49}{14} = \frac{\frac{49}{7}}{\frac{14}{7}} = \frac{7}{2}$$

Cambiamenti

Come nel mondo degli umani, anche nel mondo della matematica vi erano personaggi che pur appartenendo alla stessa “specie” avevano caratteristiche diverse.

Le frazioni erano l’esempio più vasto di diversità: vi erano un gran numero di numeratori e denominatori.

Ovviamente non tutte erano soddisfatte del loro aspetto ed alcune si sentivano in imbarazzo per esempio perché il loro denominatore era troppo grande o il numeratore troppo piccolo o addirittura si sentivano sfortunate a contenere alcuni numeri.

Non era semplice, però, modificare le caratteristiche di una frazione e per farlo era necessario rivolgersi ad un centro particolare. Il processo consisteva nel venire spediti in una scuola elementare umana i cui studenti passavano molto tempo a ridurre, moltiplicare e dividere le frazioni.

Una volta entrati il risultato era garantito dalla consegna del problema... bisognava solo sperare che i bambini avessero voglia di fare bene i loro compiti!

Caratteristiche dei numeri primi

- Un numero primo è un numero naturale divisibile solamente per se stesso e per 1.
- 1 non è considerato un numero primo.
- L'unico numero primo pari è 2.
- Dividere un numero primo per un numero diverso da se stesso o da 1 dà come risultato un numero non intero (*numero con la virgola*).
- I numeri primi sono infiniti.
- Sono alla base della "scomposizione in fattori primi" ovvero la riscrittura di un numero come prodotto di soli numeri primi.

Esempio:

$$130 = 2 * 5 * 13$$

Per questa proprietà di rappresentare ogni numero intero vengono chiamati anche "*atomi della matematica*".

I numeri primi

I numeri primi sono personaggi molto importanti, si mescolano poco con gli altri elementi della società e spesso si credono migliori degli altri chiamandosi appunto “primi”. La realtà è che non sono così apprezzati come credono.

Colei che più li odia si chiama divisione: ogni volta che è costretta a trattare con i numeri primi si sente sotto pressione.

Prendiamo ad esempio il caso in cui la divisione stia facendo il suo tranquillo lavoro: i divisibili per 2, i divisibili per 5, i divisibili per 6... un numero primo! A quel punto le soluzioni sono due: o non lo divide o fa intervenire la virgola.

Nel primo caso le probabilità di venire richiamata saranno molte, d'altronde il suo lavoro è quello di dividere, quindi se lasciasse un numero così com'è non farebbe bene il suo lavoro.

Nel secondo caso dovrebbe produrre un numero non intero, ma spesso questi “non interi” non sono ben visti dalla società perché non piacciono al mondo degli umani. Loro preferiscono i numeri interi, che si riescono a scrivere in modo pulito e, per questo motivo, capita frequentemente che i non interi vengano approssimati e dunque fatti “sparire”.

Al mondo della matematica non piace vedere i suoi cittadini “sparire”, ma purtroppo si crede che non si riuscirà mai a far apprezzare anche la virgola: gli umani, soprattutto i fisici, traggono troppo piacere nell'approssimare ogni cosa.

Il modulo

La funzione modulo, o valore assoluto, è una funzione che associa ad ogni numero reale x un valore positivo. Se la x è positiva, il risultato sarà proprio x , altrimenti il risultato sarà $-x$.

Alcune delle sue proprietà sono:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$
- $|x * y| = |x| * |y|$
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x - y| = 0$ se e solo se $x = y$
- $|x| \leq y$ se e solo se $-y \leq x \leq y$
- $|x| \geq y$ se e solo se $x \leq -y$ oppure $x \geq y$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x - y| \geq ||x| - |y||$

La cena

Quel giorno la serie si decise: sarebbe riuscita a conquistare la funzione che amava e sarebbero state vicine per sempre. Organizzò tutto quello che serviva per rendere il loro appuntamento indimenticabile e poi la portò fuori a cena.

Si sarebbero incontrate al modulo, un posto elegante e apprezzato da tutti: si diceva infatti che chiunque andasse lì tornasse a casa più positivo. Per la scelta dei piatti non c'era dubbio, avrebbero entrambi preso una epsilon, piccola a piacere, in modo da non doversi preoccupare poi della bilancia.

Quando arrivò il cameriere, la serie e la funzione si guardarono dritte negli occhi mentre la epsilon veniva servita a forma di cuore. Si avvicinarono sempre di più e quando finirono con l'abbracciarsi la serie si dichiarò: *"non posso fare a meno di te, ovunque io vada voglio incontrarti e stare con te, anche se dovessi camminare all'infinito"*.

La funzione capì subito che nonostante conoscesse la serie così poco avevano tante cose in comune, così decise di baciarla.

Lasciarono il modulo poco dopo, mano nella mano, dirette chissà dove: per quanto le riguardava, il mondo poteva annullarsi, a loro bastava strare insieme.

Il fattoriale

Scelto un numero naturale n , il suo fattoriale $n!$ sarà dato dal prodotto di tutti i numeri naturali minori o uguali a n .

Per convenzione si indica che il fattoriale di 0 è 1, cioè $0! = 1$

Ad esempio il fattoriale di 5 si scrive $5!$ e vale

$$5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$$

La definizione di fattoriale può essere data anche in modo ricorsivo. Basta infatti dire che il fattoriale di n è 1 se $n=0$, altrimenti è $n * (n - 1)!$

Questa definizione può essere utilizzata per risolvere determinati tipi di esercizi, oltre che prestarsi molto bene per la realizzazione di algoritmi informatici.

La giusta enfasi

Nel mondo della matematica nessuno risolveva i problemi meglio di x e y . Nonostante fossero diverse avevano un grande intesa e assieme avevano risolto ogni genere di problemi, compresi quelli di quello scocciatore del signor Cauchy. Fu naturale quindi, per z , scegliere loro due per organizzare la festa di compleanno per sua moglie t .

Voleva farle una sorpresa, invitando alcune sue care amiche e anche un paio di coseni, giusto per movimentare la serata. Pensò anche alla torta: nonostante la signora t fosse a dieta e insistesse per mangiare solo cose integrali, per una volta si sarebbe potuto fare uno strappo alla regola e mangiare qualcosa di più buono. Solo una fetta a testa, si disse.

Calcolò rapidamente il numero esatto degli invitati e telefonò alla pasticceria di via Stirling. Quando la proprietaria gli chiese il numero degli invitati, rispose con sicurezza: 12!

Quando t rincasò, il guaio era già fatto: una gigantesca montagna di cioccolata si ergeva imponente davanti casa e z si stava nascondendo per la paura. Solo allora la magrissima t realizzò che sarebbe stato suo il compito di mangiare tutta quella torta e andò su tutte le furie.

Nonostante x e y avessero variato la loro versione dei fatti per assumersi la colpa, t non volle sentire storie e cacciò di casa il povero marito.

Da allora z si è trasferita dal suo amico Riemann e passa ogni giorno col desiderio di poter trasformare il passato per riavere sua moglie.

Numeri complessi

Un numero complesso è un numero formato da una parte reale (x) e una parte immaginaria (y), ovvero è scrivibile come:

$$z = x + iy$$

Dove:

- i indica l'unità immaginaria, ovvero quel numero che elevato al quadrato dà -1 .

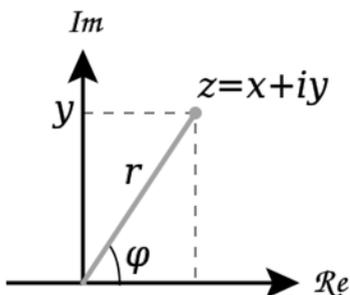
- x, y sono due numeri reali.

Spesso si usa rappresentare i numeri complessi come punti del piano cartesiano:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

r è detto modulo di z



Strani individui

Nel mondo degli umani esistevano le persone complicate, nel mondo della matematica esistevano i numeri complessi.

Questi erano dei personaggi di cui non si sapeva molto perché nella realtà di tutti i giorni non erano diversi dagli altri numeri, ma nell'immaginario collettivo erano visti come delle spie o addirittura individui poco raccomandabili.

Alcuni di loro, stanchi di dover continuamente nascondere le loro azioni, erano riusciti ad annullare la loro condizione di immaginari, ma di certo non con poca fatica. Per tornare alla realtà infatti bisognava essere in grado di vedere il mondo dalla giusta angolazione, mantenendo comunque un certo modulo.

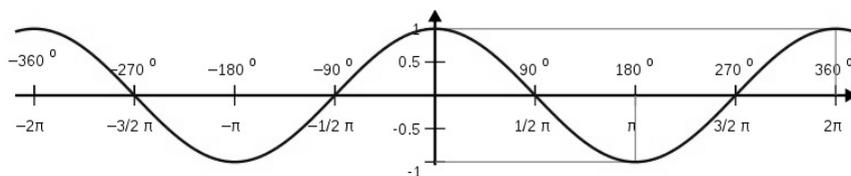
Era certo, però, che molti di loro avessero un lato nascosto e vivessero una vita parallela o addirittura avessero contatti con altri mondi. Non erano dannosi perché avevano a che fare soprattutto con chi con loro ci sapeva lavorare, ma spesso la loro presenza metteva un po' di confusione fra gli studenti e questo portava il mondo della matematica a interventi di salvataggio difficili.

Fortunatamente al mondo c'era qualcuno che si occupava di non far trasparire nulla, mantenendo tutto molto segreto: l'unità immaginaria. Grazie a lei di loro non si sa molto altro, ma una cosa va detta: il loro lato nascosto è tutt'altro che immaginario... è reale.



Il coseno

Il grafico della funzione $\cos(x)$ è il seguente:



- Il coseno è una funzione che associa ad ogni numero x un valore compreso fra -1 e 1.
- È una funzione 2π -periodica ovvero, come si può vedere dall'immagine riportata sopra, la sua curva (chiamata cosinusoide) ripete all'infinito la forma che presenta fra 0 e 2π .
- È una funzione pari, infatti $\cos(x) = \cos(-x)$

Il luna park

Ogni tanto anche gli abitanti del mondo della matematica avevano bisogno di divertirsi e uno degli svaghi più diffusi era una giornata al luna park.

L'attrazione del momento era la cosinusoide. Si trattava di una montagna russa di ultima generazione, con la possibilità di percorrerla verso destra o verso sinistra e ci si poteva rimanere anche delle ore perché era infinita e ognuno poteva decidere quando scendere.

Per salire si passava attraverso un ascensore molto particolare che portava al valore uno, cioè un *elevamento alla zero*, per scendere invece bastava chiamare lo zero e farsi riportare al piano terra attraverso una moltiplicazione.

In verità sarebbe stato molto più semplice realizzare una senoide, così da poterci salire senza doversi elevare alla zero, ma il progetto si era arenato dopo una brutta faccenda di tangenti. Pare infatti che periodicamente qualcuno rubasse il materiale e lo utilizzasse per costruire le opere più disparate. A lungo si sospettò di un certo Fourier, ma fu infine scagionato quando anche lui venne derubato delle sue sinusoidi. Ora tutti erano pari...

I problemi di Cauchy

I problemi di Cauchy consistono nel trovare la soluzione di un'equazione differenziale di un qualche ordine, ovvero trovare quella funzione che soddisfa un'equazione contenente la funzione stessa e alcune delle sue derivate. La soluzione si trova poi conoscendo il comportamento della funzione e delle sue derivate in punti specifici (condizioni al contorno).

Un caso molto semplice è il seguente:

$$\begin{cases} af(x) + bf'(x) = 0 \\ f(x_1) = c \end{cases}$$

Il metodo della separazione delle variabili consente di risolvere problemi di questo tipo nel seguente modo:

$$b \frac{df}{dx} = -af(x)$$

"separazione delle variabili"

$$\frac{df}{f(x)} = -\frac{a}{b} dx$$

$$\ln f(x) = -\frac{a}{b} x + \text{costante}$$

$$f(x) = Ae^{-\frac{a}{b}x}$$

Imponendo poi la condizione data $Ae^{-\frac{a}{b}x_1} = c$ si trova il valore della costante A.

L'esame

Una cosa che piaceva parecchio nel mondo della matematica era seguire le vicende degli umani e in particolare gli esami degli studenti: era considerato una sorta di reality show e ci si divertiva molto a ridere degli errori che venivano commessi.

Quel giorno andava in onda un esame di analisi II e il protagonista di questa avventura era uno studente di fisica. Stupendo! Era risaputo che gli studenti di fisica avessero dei "piccoli" problemi con l'analisi e tutti non vedevano l'ora di seguire la vicenda.

"Lo studente si siede, è molto agitato e sistema tutti i suoi appunti sul banco. Il docente consegna l'esame... un problema di Cauchy!"

Tutti avevano esultato! I problemi di Cauchy erano i più divertenti.

"Afferra il suo quaderno e lo sfoglia velocemente cercando la sezione dedicata a quel tipo di problemi: condizioni al contorno, derivate... variazione delle costanti. Aveva trovato il metodo ora bisognava solo applicarlo."

Tutti erano scoppiati a ridere, non riuscivano a trattenersi nel vedere il poverino tentare e ritentare di risolvere tutti quei conti, sbagliare e cancellare, per nulla!

"Scoraggiato decide di appoggiare la penna e riflettere: non c'è modo di uscirne. Dopo alcuni minuti ritenta nuovamente, un ultimo tentativo... ma non riesce a concludere. Abbandona."

Noooo! Non ci potevano credere: aveva davvero abbandonato. Eppure... sarebbe bastato separare le variabili!

La serie geometrica

In matematica la serie geometrica è definita come:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ovvero, fissato un valore di x , si sommano tutte le sue potenze partendo da quella nulla fino a quella infinita: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

La somma dipende dal valore di x assegnato, infatti:

- se $x \geq 1$ la serie diverge, ovvero la somma di tutti i suoi termini ha come risultato infinito.
- se $x \leq -1$ la serie è indeterminata, ovvero la somma di tutti i suoi termini non esiste, non è un numero finito ne infinito. Ad esempio per $x = -1$ la serie oscilla fra 0 e 1.
- se $|x| < 1$ la somma della serie esiste e vale $\frac{1}{1-x}$.

Il posto giusto

Il signor integrale non era molto entusiasta di dover tentare, di nuovo, di consolare la serie geometrica. Lui, di solito, con le serie andava d'accordo e in fondo sentiva che tra loro non c'era tanta differenza, ma lei era proprio antipatica e sempre di cattivo umore.

Quel giorno decise che forse era il caso di tentare un nuovo approccio e invece di dirle il solito "tranquilla, piccola serie, andrà tutto bene" cercò di farsi raccontare il motivo del suo continuo malumore.

Dopo un primo rifiuto, lei cominciò a raccontare:

"Integrale, io sono sempre triste perché non riesco a fare amicizia. Con le x grandi non mi trovo a mio agio, mi fanno impazzire e non capisco dove andare e cosa fare. Ci ho provato così tanto che poi ho pensato in negativo e sono andata da loro, dalle x negative, ma nemmeno con loro è andata bene. Alla fine ho creduto a -uno, che mi aveva promesso che mi avrebbe resa felice, ma non era vero. Con lui era come stare sulle montagne russe: su e giù, su e giù..."

A quel punto l'integrale aveva capito dove fosse il problema e le chiese se avesse mai provato a trattare con le piccole x . Lei rispose di no, non le piacevano i bambini. Integrale non volle sentire storie e la trascinò all'asilo della città.

Appena vide le piccole x , la serie si sentì subito...nel posto giusto. Le sembrava che tutto ora avesse un senso e ringraziò l'integrale moltissime volte. Lui le disse che non era necessario perché non aveva nessun merito, semplicemente nel mondo della matematica per tutti esisteva il posto giusto.

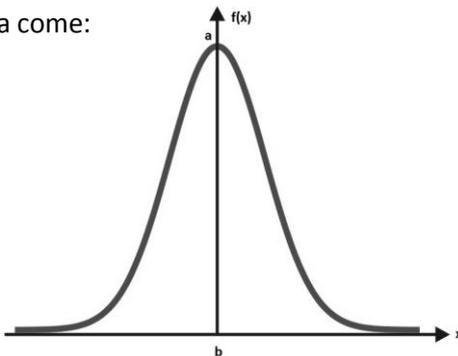
Alcune caratteristiche della Gaussiana

La gaussiana è una funzione definita come:

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{c^2}}$$

dove:

- a è il punto più alto della curva
- b è la x a cui è associato il valore più grande della funzione
- c rende conto della larghezza della “campana”



Come si vede dal grafico la funzione è simmetrica rispetto a $x = b$. È facile vedere questa proprietà anche dal punto di vista matematico, scegliamo:

$$a = 1$$

$$b = 0$$

$$c = 1$$

A questo punto $f(x) = e^{-x^2}$.

Se prendiamo ad esempio $x = 5$ e $x = -5$ si può vedere che in entrambi i casi $f(x) = e^{-25}$.

Un ospite molto gradito

Nel mondo della matematica, quel giorno, non si parlava d'altro: era arrivata lei. Nessuno in realtà sapeva davvero di chi si trattasse, ma di lei si conoscevano alcune cose e ci volle poco per intuire la sua identità.

C'era chi non credeva ai suoi occhi nel vederla, con la sua forma così perfetta, sia che fosse larga o stretta rimaneva sempre così simmetrica da far invidia a chiunque. Per non parlare di ciò che ne pensava la signora trasformata, lei era convinta che non ci fosse nessuno più disponibile di lei e si diceva addirittura che non si facesse influenzare molto dal suo integrale: lei rimaneva sempre con la sua forma stupenda.

Ovviamente anche la signora derivata era entusiasta: finalmente un cliente poco esigente, certo non tutti potevano essere semplici come la x ma lei rimaneva una delle funzioni più piacevoli.

Era amata da tutti, soprattutto dagli integrali grandi che andavano da meno infinito a più infinito. Con loro aveva un bellissimo rapporto e perfino ciò che ne risultava rendeva felice qualcuno: il signor π greco e la signora radice.

Non c'erano più dubbi, tutti avevano capito che la bellissima Gaussiana era arrivata in città.

